THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

FRANÇOIS ARENE

1re THÈSE. — Contribution à l'étude des mobiles empennés animés d'une faible vitesse de roulis.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Estimation statistique des performances d'un système physique complexe à courte durée de fonctionnement

Soutenues le 27 mai 1966 devant la Commission d'examen.

MM. BLAQUIÈRE. *Président.*

MAZET. . . . } *Examinateurs.*
LEFEVRE. . }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1967

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546018_0029

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

FRANÇOIS ARENE

1re THÈSE. — Contribution à l'étude des mobiles empennés animés d'une faible vitesse de roulis.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Estimation statistique des performances d'un système physique complexe à courte durée de fonctionnement

Soutenues le 27 mai 1966 devant la Commission d'examen.

MM. BLAQUIÈRE. *Président.*

MAZET.... } *Examinateurs.*
LEFEVRE.. }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Le Doyen..... M. ZAMANSKY.

PROFESSEURS

PRENANT..... T Anatomie et histologie comparée.
GRASSE..... T Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST..... T Chimie organique.
WYART..... T Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER..... T Zoologie.
AUGER..... T Physique quantique et relativité.
MONNIER..... T Physiologie générale.
PIVETEAU..... T Paléontologie.
ROCARD..... T Physique E.N.S.
CARTAN..... T Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE..... T Chimie générale.
N..... T Géométrie supérieure.
COULOMB..... T Physique du globe.
Mlle COUSIN..... T Biologie animale SPCN.
CHRÉTIEN..... T Chimie minérale.
BOCQUET..... T Zoologie.
KASTLER..... T Physique E.N.S.
EPHRUSSI..... T Génétique.
GAUTHERET..... T Biologie végétale CPEM.
LUCAS R..... T Recherches physiques.
THOMAS A..... T Biologie cellulaire.
MORAND..... T Physique enseignement.
SOLEILLET..... T Physique (C.P.E.M.).
FORTIER..... T Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH..... T Zoologie.
QUENEY..... T Météorologie et dynamique de l'atmosphère.
GALLIEN..... T Embryologie.
EICHHORN..... T Botanique.
DE CUGNAC..... T Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS... T Chimie physique.
THELLIER..... T Physique du globe.
PONCIN..... T Mécanique générale.
DUBREIL..... T Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET..... T Chimie organique.
CAGNIARD..... T Géophysique appliquée.
CHAMPETIER..... T Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER..... T Micropaléontologie.
JUNG..... T Géologie.
TRILLAT..... T Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN..... T Chimie organique et structurale.
VASSY..... T Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES..... T Théorie physique.
AMIEL..... T Chimie générale.
HOCART..... T Minéralogie et cristallographie.
J.P. MATHIEU.... T Physique optique.
COUTEAUX..... T Cytologie.
CHOQUET..... T Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN..... T Biologie végétale marine.
JOST..... T Physiologie comparée.
FORTET..... T Calcul des probabilités et physique mathématiques.
SCHWARTZ..... T Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD..... T Physiologie végétale.
MALAVARD..... T Aviation (technique aéronautique).
BRELOT..... T Analyse supérieure.
NORMANT..... T Synthèse organique.
BENARD..... T Chimie appliquée.
DUGUE..... T Statistique mathématique.
SOULAIRAC..... T Psychophysiologie.
ULRICH..... T Physiologie végétale appliquée.
KIRRMANN..... T Théories chimiques.
CHADEFAUD..... T Botanique.
Mlle LE BRETON.. T Physiologie de la nutrition.
LELONG..... T Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS..... T Anatomie et histologie comparées.
EHRESMANN..... T Topologie algébrique.
FRANÇON..... T Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD..... T Géographie physique, géologie dynamique.
DODEMENT..... T Mathématiques (M.G. P.).
PISOT..... T Technique mathématique de la physique
ROCH..... T Géologie.
SCHATZMANN..... T Astrophysique.
TERMIER..... T Géologie générale.
ZAMANSKY..... T Mathématiques générales.
LENNUIER..... T Physique (M.G.P.).
ROUTHIER..... T Géologie appliquée.
Mme TONNELAT... T Physique théorique.
DIXMIER..... T Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY..... T Chimie générale.

Aigrain	T	Électrotechnique.
Brusset	T	Chimie systématique.
Lévy	T	Physique théorique des hautes énergies.
Mme Chaix	T	Chimie biologique.
Mme Hurel-Py	T	Biologie végétale (C.P.E.M.).
Pannetier	T	Chimie générale I.
Brun	T	Mécanique des fluides I.
Mme Dubreil	T	Mathématiques (agrégation).
Mme Lelong	T	Mathématiques II (E.N.S.).
Bellair	T	Géologie (S.P.C.N.).
Cotte	T	Physique électricité.
Dubois J.E.	T	Chimie organique physique.
Lamotte	T	Zoologie (E.N.S.).
Olmer	T	Energétique générale.
Gauthier	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz	T	Chimie physique.
Brossel	T	Physique atomique.
Buser	T	Physiologie comparée.
Camus	T	Physiologie végétale.
Curien	T	Minéralogie et cristallographie.
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann	T	Chimie quantique.
Teillac	T	Physique nucléaire et radioactivité.
Ville	T	Econométrie.
Willemart	T	Chimie (C.P.E.M.).
Freymann	T	Recherches physiques.
Rollet	T	Chimie minérale.
Mlle Josien	T	Chimie (S.P.C.N.).
Chevalley	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
Germain	T	Mécanique théorique des fluides.
Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie physique.
Berthelot	T	Physique des particules fondamentales.
Bricard	T	Météorologie.
Mme Albefessard	T	Psycho-physiologie.
M. Julia	T	Étude des molécules naturelles complexes.
Magat	T	Physico-chimie des rayonnements.
Mlle Quintin	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Chatelet	T	Chimie (C.P.E.M.).
Mattler	T	Physique (S.P.C.N.).
Bouissières	T	Radiochimie.
Mme Couture	T	Thermodynamique et mécanique physique.
Franc	T	Biologie animale (C.P.E.M.).
Schnell	T	Botanique tropicale.
Stolkowski	T	Physiologie générale.
Acher	T	Chimie biologique.
Baudoin	T	Biologie animale (C.P.E.M.).
Beaumont		Biologie animale (S.P.C.N.).
Blamont		Géophysique ionosphère.
Boureau	T	Botanique.
Curie D.		Physique (M.G.P.).
Durand Delga	T	Géologie.
Heller	T	Physiologie végétale.
Tortrat	T	Calcul des probabilités
Cailleux	T	Géologie (S.P.C.N.).
Magnan		Physique électricité.
Daudel	T	Mécanique ondulatoire.
Mlle Fourcroy		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mme Choquet Bruhat		Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle Veil	T	Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique physique et expérimentale.
Cabannes	T	Mécanique générale.
Caire	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Comolet		Mécanique des fluides.
Delloue	T	Physique de l'exosphère.
Houillon		Biologie animale (C.P.E.M.).
Olivier		Anthropologie.
Samuel	T	Mathématiques (E.N.S jeunes filles).
Thiry	T	Mécanique céleste.
Abeles	T	Physique (S.P.C.N.).
Amat	T	Thermodynamique.
Auboin	T	Géologie.
Mme Benoit Gueutal	T	Physique nucléaire et radioactivité.
Bougis		Biologie végétale marine Villefranche-sur-Mer.
Rigaudy	T	Chimie (S.P.C.N.).
Collongues		Chimie (C.P.E.M.).
Dubert		Biochimie.
Nozières		Physique générale.
Cadiot		Chimie organique.
Ivanoff		Océanographie physique.

François		Zoologie.
Talbot		Génie chimique.
Mme Nougarede		Botanique.
Bruhat	T	Mathématique(M.P.C.)
Fournet		Électricité générale.
Deheuvels	T	Mathématiques propédeutique.
Furon	T	Géologie (S.P.C.N.).
Mme Gans	T	Génétique.
Geneves		Biologie végétale (C.P.E.M.).
Hupe	T	Pétrographie.
Hollande	T	Biologie générale.
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte	T	Chimie organique.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel		Biologie générale.
Ravier	T	Pétrographie.
Morel F	T	Physiologie comparée.
Roseau	T	Mécanique théorique des fluides.
Roubine		Électronique (E.S.E.).
Silber	T	Chimie (C.P.E.M.).
Uebersfeld	T	Électronique.
Yvon	T	Théories physiques.
Hervé	T	Mathématiques.
Mme Peckerwimel	T	Astrophysique.
Balkanski		Physique (M.P.C.).
Le Corre	T	Électricité.
Nataf	T	Physique nucléaire et radioactivité.
Échalier		Biologie animale (C.P.E.M.).
Barraud	T	Physique (C.P.E.M.).
Dars		Géologie structurale et appliquée.
Camefort	T	Botanique (agrégation)
Vichniewsky	T	Mécanique industrielle
Sigwalt	T	Chimie (S.P.C.N.).
Blaquière		Électronique.
Baruch		Physique propédeutique.
Arnous	T	Physique théorique.
Slonimski		Génétique.
Malliavin	T	Mathématiques propédeutique.
Gaudemar		Chimie propédeutique
Brousse	T	Mécanique théorique.
Rosch	T	Astronomie.
Guy	T	Physique expérimentale.
Lazard		Mathématiques (M.P.C.).
Morel P		Physique (M.P.C.).
Arsac		Programmation.
Lefebvre		Chimie (M.P.C.).
Bok		Physique propédeutique.
Chapeville		Biochimie
Benoit		Physique (C.P.E.M.).
Rio		Chimie (C.P.E.M.).
Jauzein		Géologie (E.N.S.).
Prévost G		Biologie végétale. (C.P.E.M.).
Favard P		Biologie animale (C.P.E.M.).
Mme Charniaux-Cotton		Évolution des êtres organisés.
Mlle Ficini		Chimie (C.P.E.M.).
Lequeux		Astronomie.
Cohen-Tannoudji		Physique atomique.
Tavernier		Physique (C.P.E.M.).
Durand Michel		Biologie animale (S.P.C.N.).
Pascaud		Physiologie.
Mme Petit		Biologie animale (C.P.E.M.).
Cagnac		Physique agrégation.
Falk-Vairant		Physique nucléaire.
Krasner	T	Mathématiques.
Benzecri	T	Statistiques.
Vinh Mau		Physique (M.G.P.).
Duquesnes		Physique (C.P.E.M.).
Schutzenberger		Programmation.
Trémillon		Chimie (M.P.C.).
Fayard		Chimie (M.P.C.).
Buvet		Chimie (C.P.E.M.).
Authier		Physique (M.P.C.).
Picinbono	T	Physique (C.P.E.M.).
Bonnefille		Électrotechnique.
Mme Puiseux-Dao		Biologie végétale.

Le Secrétaire général..... R. Poullain.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Mangenot G.	T	Biologie végétale.
Jacquinot P.	T	Optique.
Guinier A.	T	Électricité et physique des solides.
Grivet P.	T	Électronique.
Blanc-Lapierre A	T	Accélérateur linéaire.
L'Héritier P.	T	Génétique des virus.
Lemée G.	T	Écologie végétale.
Moyse A.	T	Physiologie végétale.
Dode M.	T	Chimie thermodynamique.
Deny J.	T	Mathématiques.
Rivière A.	T	Géologie générale et sédimentologie.
Michel A.	T	Chimie minérale.
May R.	T	Anatomie comparée.
Delange H.	T	Mathématiques.
Chapelle J.	T	Physique expérimentale.
Lacombe P.	T	Métallurgie.
Benoit P.	T	Physiologie générale.
Guinochet J.	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Néron A.	T	Mathématiques.
Nozeran R.	T	Botanique approfondie
Castaing R.	T	Thermodynamique.
Ellenberger F.	T	Géologie structurale.
Lederer E.	T	Chimie biologique.
Rizet J.	T	Génétique.
Lender T.	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
Poitou G.	T	Mathématiques.
Fréon P.	T	Chimie organique.
Tonnelat	T	Biologie physico-chimique.
Brunn Jan.	T	Géologie historique.
Jean M.	T	Physique nucléaire.
Bergerard J.	T	Zoologie.
Roger J.	T	Paléontologie.
Lefort M.	T	Chimie nucléaire.
Lagarrigue A.	T	Physique des hautes énergies.
Jullien J.	T	Chimie structurale organique.
Arnulf A.	T	Optique.
Rouault M.	T	Diffraction électronique.
Maréchal A.	T	Optique théorique et appliquée.
Mazet R.	T	Mécanique générale.
David Serge	T	Chimie agrégation.
Guérin H.	T	Chimie des gaz et des combustibles.
Lesieur L.	T	Mathématiques (M.P.C.) et algèbre.
Kourganoff	T	Astronomie.
Arnoult P.	T	Physique électronique.
Kahane J.P.	T	Mathématiques.
Brochard J.	T	Physique propédeutique.
Mme Roizen	T	Physique (C.P.E.M.).
Bertein F.	T	Électronique.
Malgrange B.	T	Mathématiques.
Corabœuf E.	T	Physiologie animale.
Friedel J.	T	Physique des solides.
Chevaugeon J.	T	Cryptogamie.
Meyer P.	T	Physique théorique et atomique.
Lehmann P.	T	Accélérateur linéaire.
Chabbal R.	T	Physique propédeutique.
Delcroix J.M.	T	Physique des plasmas
Cerf J.	T	Mathématiques.
D'Espagnat B.	T	Physique théorique.
Schaeffer P.	T	Microbiologie.
De Gennes P.	T	Physique des solides.
Mme Marty N.		Physique propédeutique.
Gourdin M.		Physique théorique.
Perez-Y-Jorba		Physique propédeutique.
Gorenflot E.		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Riou M.		Physique nucléaire.
Brousse R.		Géologie (S.P.C.N.).
Lioret C.		Physiologie végétale.
Clauser H.		Chimie biologique.
Jancovici B.		Physique atomique.
Lurcat J.		Physique propédeutique.
Le Berre J.		Entomologie.
Lavorel J.		Biophysique.
Perio P.		Physique propédeutique.
Fetizon M.		Stéréochimie.
Chemla M.		Chimie des isotopes.
Mazières C.		Chimie (S.P.C.N.).
Vilkas M.		Chimie (C.P.E.M.).
Blandin A.		Physique des solides.
Brun G.		Génétique.
Mercouroff		Physique agrégation.
André J.		Microscopie électronique.
Chevallier F.		Physiologie animale.
Mlle Marcou		Biologie cellulaire (C.P.E.M.).
Bourdu R.		Physiologie végétale.
Berkaloff A.		Biologie animale (C.P.E.M.).
Mlle Lefort M.		Biologie cellulaire (C.P.E.M.).
Mme Lambert		Physique (C.P.E.M.).
Bizot J.C.		Physique (M.P.C.).
Guiraud J.P.		Mécanique.
Labouesse B.		Chimie (S.P.C.N.).

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MOBILES EMPENNÉS ANIMÉS D'UNE FAIBLE VITESSE DE ROULIS

PAR

F. ARENE

INGÉNIEUR MILITAIRE EN CHEF DES FABRICATIONS D'ARMEMENT

Résumé. — *Les problèmes rencontrés sur les terrains d'essai ont suscité l'élaboration d'une théorie utile à la mise au point des munitions empennées à tir tendu. Vérifiée expérimentalement à l'occasion d'une étude d'empenné supersonique, cette théorie paraît susceptible de s'appliquer à divers types de mobiles empennés.*

*
* *

Il convient d'abord d'examiner la mécanique du vol des empennés car celle-ci est un facteur important et original de la dispersion observée au tir avec ce genre de mobile.

A cet effet la théorie proposée complète les hypothèses classiques et précise la nature des imperfections de symétrie. Elle distingue en particulier trois axes liés au mobile.

— *l'axe longitudinal et principal d'inertie;*

— *l'axe de moment aérodynamique nul;*

— *l'axe de force latérale nulle.*

Les mouvements du mobile autour du centre de gravité sont alors étudiés en tenant compte des travaux antérieurs. Les conditions de stabilité balistique (périodicité et amortissement) sont définies et les effets des fluctuations éventuelles du moment stabilisant ou du moment cinétique sont soulignés.

Ensuite sont déterminés :

— la valeur des altérations induites par la nutation initiale, par le vent et par les imperfections de symétrie;

— l'intérêt et le choix des vitesses lentes de roulis.

L'observation avec ce genre de projectile d'un amortissement rapide de la nutation permet de limiter le calcul des altérations à la déviation résiduelle de la trajectoire après amortissement de la nutation.

*
* *

Atteindre la cible étant le but de la précision au tir, les éléments de la probabilité d'atteinte sont analysés, et on définit en particulier :

— la dispersion des coups au cours du tir, qui constitue le défaut de précision au tir;

— la dispersion des points moyens d'un tir à l'autre, qui correspond à un défaut de fidélité du système;

— les erreurs de préparation et de réglage du tir.

Le caractère aléatoire de la dispersion du tir et de ses éléments fait l'objet d'une analyse particulière. Les perturbations qui accompagnent le lancement du mobile sont étudiées en détail, principalement dans le cas du canon où l'on analyse les effets du souffle de bouche.

Pour présenter une précision suffisante au tir de plein fouet le mobile empenné animé d'une faible vitesse de roulis doit satisfaire à cinq conditions préalables :

— résistance au tir;

— stabilité aérodynamique;

— vitesse de roulis comprise entre deux valeurs déterminées par les caractéristiques du mobile;

— limitation des imperfections de symétrie;

— limitation des effets du vent (condition de traînée).

Ces cinq conditions peuvent et doivent être satisfaites. La précision au tir est alors considérablement améliorée et c'est la dispersion des nutations initiales qui constitue la source principale de dispersion résiduelle. Une réduction notable de la dispersion résiduelle peut être encore obtenue par le soin apporté à l'organisation du mobile et du lanceur.

Les effets sur la probabilité d'atteinte de la dispersion des coups au cours du tir sont ensuite l'objet d'une évaluation, et des critères de précision sont proposés.

Lorsque ces critères sont déjà satisfaits, l'amélioration de la précision n'a plus d'action notable sur les résultats du tir de plein fouet, car la dispersion au cours du tir est alors négligeable devant la dispersion d'un tir à l'autre ou devant l'erreur de préparation ou de réglage du tir.

*
* *

Enfin la théorie est étendue au cas des empennés à propulsion additionnelle de manière à déterminer des lois de propulsion optimales du point de vue de la précision au tir.

Si les lois de poussée sont suffisamment reproductibles et si les dissymétries liées au jet sont suffisamment faibles, il existe une famille de lois optimales susceptibles de compenser systématiquement l'altération de nutation. Cette famille est caractérisée par une poussée de l'ordre de la force latérale unitaire

— déclenchée avec un court retard au voisinage du premier nœud de nutation

— et maintenue soit pendant un petit nombre impair de périodes de nutation, soit au-delà de la nutation initiale.

Dans le cas où les lois de poussée ne sont pas suffisamment bien définies, il est préférable d'appliquer au mobile une poussée de faible niveau, et de maintenir cette poussée pendant un temps relativement long.

PREMIÈRE PARTIE

AVANT-PROPOS

INTRODUCTION.

NOTATIONS

HYPOTHÈSES

VALEURS NUMÉRIQUES

1.1. Introduction.

1.1.1. *Origine et objet de l'étude.*

Les études de projectiles ont souvent présenté un caractère essentiellement technologique et expérimental. Cependant il a paru avantageux, sinon nécessaire, d'orienter les essais et les mises au point par une théorie de la mécanique du vol des mobiles empennés.

Des ouvrages ont déjà traité le problème en général [1]; ils ont apporté au rédacteur une aide précieuse. Cependant des développements nouveaux méritent encore d'être consacrés :

— aux effets des imperfections de symétrie du mobile empenné;

— aux phénomènes qui accompagnent le lancement ou largage de ce mobile;

— à la répercussion des altérations de la trajectoire sur la dispersion du tir et sur la probabilité d'atteinte;

— à l'effet de la propulsion additionnelle sur la précision au tir.

[1] Les repères [B1, B2, ...] renvoient le lecteur à la Bibliographie.

C'est plus spécialement avec les empennés à tir tendu que le besoin d'une telle théorie est apparue. On se propose donc d'adapter et de compléter les théories antérieures [B1, B2, B3], puis de les appliquer à un problème particulier :

— l'amélioration de la précision au tir tendu et « de plein fouet » [1] des mobiles empennés animés d'une faible vitesse de roulis.

Ce problème revêt de l'intérêt car ce sont généralement les difficultés rencontrées dans le domaine de la précision au tir qui limitent la diffusion des empennés.

Une première ébauche de cette étude a été esquissée en 1957. Les résultats de la théorie se sont révélés depuis cette date en bon accord avec l'expérience, tout au moins dans le cas de mobiles supersoniques présentant des empennages à faible portance et une traînée réduite.

1.1.2 *Position du problème*

Le mouvement autour du centre de gravité, c'est-à-dire le mouvement en assiette ou en incidence, constitue un facteur important de la dispersion observée au cours du tir des mobiles empennés. Ce sont d'ailleurs ces aspects particuliers de la mécanique du vol qui confèrent au problème de la précision au tir des empennés une certaine originalité et c'est par leur étude théorique que ce problème est abordé ici.

Cette théorie s'applique principalement au cas des trajectoires tendues, des courtes durées de trajet et des faibles angles de site. Les propriétés classiques de la correction complémentaire de site permettent toutefois d'étendre cette théorie au cas des sites plus importants.

Les hypothèses traditionnelles de la balistique française peuvent être appliquées au problème particulier et au domaine limité qui vient d'être défini. Les valeurs assez inhabituelles prises ici par les paramètres expliquent déjà certains aspects originaux du phénomène étudié. L'influence très prépondérante des nutations initiales sur la dispersion au tir, et les risques présentés par l'accroissement de l'effet MAGNUS sont deux de ces aspects.

Mais pour prévoir les effets des *dissymétries* éventuelles du mobile ou celle des *fluctuations périodiques* du couple stabilisant, il faut *compléter les hypothèses* classiques. La nécessité de maintenir *une faible vitesse de roulis* et les risques présentés par certaines valeurs critiques de la vitesse de roulis apparaissent alors comme une autre particularité du phénomène étudié.

La distribution aléatoire des altérations provoquées par le mouvement en incidence conduit avec d'autres éléments à la dispersion au cours du tir. Il convient donc de chercher à en limiter les effets et d'en évaluer l'influence sur la probabilité d'atteinte.

Enfin il est intéressant d'étendre la théorie au cas des mobiles empennés à propulsion additionnelle et de rechercher des lois de poussées optimales quant à la précision au tir.

[1] Le cas du tir « de plein fouet » est celui où l'objectif peut être assimilé à sa silhouette dans un plan normal à la direction du tir.

1.1.3. *Plan de l'étude.*

On examinera successivement :

a. La mécanique du vol des mobiles empennés;

— hypothèses et notations;

— mouvement autour du centre de gravité (mouvement en incidence);

— répercussion de ce mouvement sur la trajectoire (altération);

b. Les effets des altérations provoquées par le mouvement en incidence sur la probabilité d'atteinte;

— effet de ces altérations sur la précision au tir (ou sur la dispersion au cours du tir) ;

— limitations de ces effets;

— effet de la précision au tir sur la probabilité d'atteinte et critères de précision;

c. L'extension de la théorie de la mécanique du vol des empennés au cas de la propulsion additionnelle;

— hypothèses complémentaires;

— application à la recherche de lois de poussées optimales du point de vue de la précision.

1.2. Notations et hypothèses classiques.

1.2.1. *Les notations classiques.*

Les figures 1 à 5 rappellent les notations utilisées par la balistique française.

Ces notations définissent en particulier *trois trièdres de référence* :

— $(O\, x_0 y_0 z_0)$ lié au sol;

— $(G\, x_1 y_1 z_1)$ lié à la vitesse;

— $(G\, x\, y\, z)$ lié au mobile.

L'orientation de la vitesse par rapport au sol est repérée par les angles τ et η.

L'orientation du trièdre $(G\, x\, y\, z)$ par rapport au trièdre $(G\, x_1 y_1 z_1)$ est définie par les angles d'Euler ψ, δ et φ.

En appelant ω la vitesse de roulis [1], et en posant :

$$\Phi = \psi + 3\frac{\pi}{2},$$

on a pour les faibles valeurs de δ :

$$\widehat{Gx_1,\ Gx} = \varphi + \Phi + \frac{\pi}{2}, \qquad \omega \simeq \varphi' + \Phi'.$$

[1] Les balisticiens français donnent aussi à la vitesse de roulis du projectile autour de son axe longitudinal Gz le nom de vitesse de rotation.

Les mouvements du mobile autour du centre de gravité, ou mouvements en incidence, sont repérés par rapport à la vitesse par l'imaginaire :

$$\zeta = \delta e^{i\Phi},$$

qui mesure, dans le plan complexe $(G\,x_1 y_1)$, la projection parallèlement à la vitesse du vecteur unitaire porté par l'axe longitudinal Gz lié au mobile.

L'angle $\delta = \widehat{z\,G\,z_1}$ est *l'obliquité*, ou *incidence*, et le plan $(G\,z\,z_1)$ est plan de résistance, ou plan d'incidence.

Le calibre est représenté par la notation a.

1.2.2. *Les hypothèses classiques.*

Les hypothèses traditionnelles de la balistique française et de l'école anglaise supposent en particulier les point suivants :

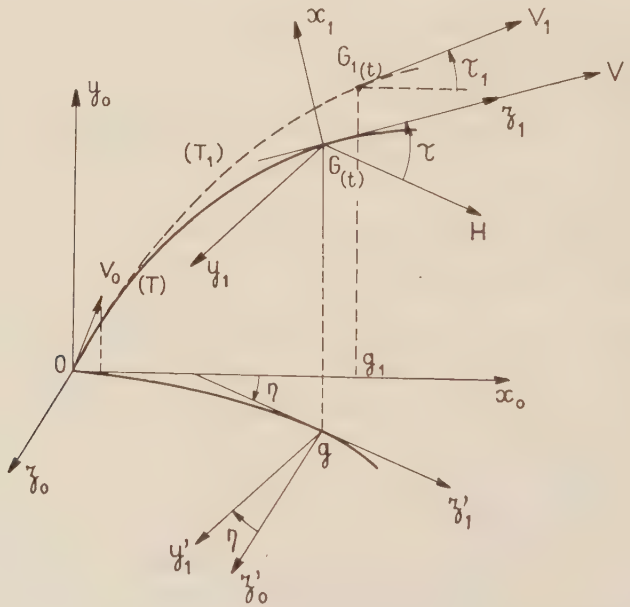


Fig. 1. — Notations concernant le mouvement du centre de gravité

(T_1) trajectoire des tables (trajectoire non altérée),
(T) trajectoire suivie par le mobile (trajectoire altérée),
$Ox_0y_0z_0$ axes fixes passant par l'origine de la trajectoire : Ox_0y_0 plan de tir, Oy_0 verticale de O,
$Gx_1y_1z_1$ axes liés au centre de gravité du mobile,
τ inclinaison de la trajectoire au point G,
η écart angulaire par rapport au plan de tir de la projection horizontale de la tangente à la trajectoire,
$\delta\tau$ inclinaison supplémentaire de la trajectoire (influence du mouvement du centre de gravité) : $\tau = \tau_1 + \delta\tau$,
Gx_1 normale à la trajectoire dirigée vers le haut,
Gy_1 normale à la trajectoire dirigée vers la droite,
$\overrightarrow{GV}$ vitesse du centre de gravité.

a. L'axe Gz est à la fois axe de symétrie du profil extérieur et axe principal d'inertie du mobile;

b. Les moments d'inertie A et B, liés aux axes principaux d'inertie Gx et Gy sont égaux (le moment d'inertie C lié à Gz est pratiquement toujours nettement inférieur à A);

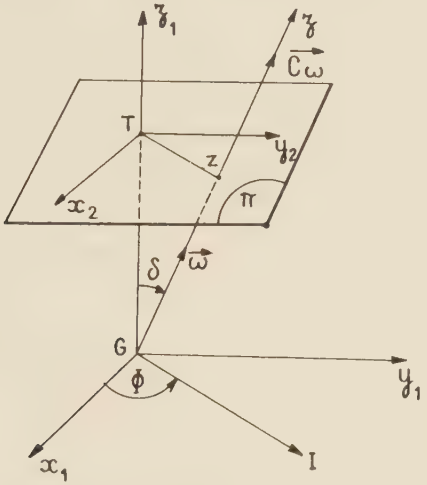


Fig. 2. — Notations concernant le mouvement autour du centre de gravité

Gz_1 axe, support de la vitesse du centre de gravité,
(π) : plan perpendiculaire à la tangente GT, à la distance GT = + 1,
Gz : axe longitudinal du mobile (axe principal d'inertie),
Z : trace de Gz sur le plan (π),
δ : obliquité de l'axe du mobile par rapport à la tangente à la trajectoire,
Φ : orientation de l'axe du mobile autour de cette tangente,
$\zeta = \delta e^{i\Phi}$: obliquité et orientation (ou *yaw*), représentées par une imaginaire, dans le plan (π), l'image de cette imaginaire sera $\overrightarrow{TZ}$,
$\vec{\omega}$: vitesse de roulis du mobile autour de son axe (ou vitesse de rotation des balisticiens),
C : moment principal d'inertie axiale du mobile,
A et B : moments principaux d'inertie transversale du mobile, (on suppose A = B).

c. L'obliquité δ reste faible;

d. Le système des forces appliquées au mobile est constitué par la pesanteur, par les forces dites « de compression symétrique » et par les forces dites « de viscosité ». A chacun des *éléments de réduction* de ce système, les notations classiques associent *deux* catégories de paramètres : paramètres sans dimension et avec dimensions (Voir fig. 4);

e. La résultante générale de ce système est la *somme de quatre forces :*

— *la pesanteur* force verticale qui a pour composantes :

— $p \cos \tau = - mg \cos \tau$, dans le plan complexe $(G_1 x_1 y_1)$,

— $p \sin \tau = - mg \sin \tau$, suivant $\vec{Gz_1}$;

— *la résistance à l'avancement* $\vec{F_T}$, parallèle à la vitesse;

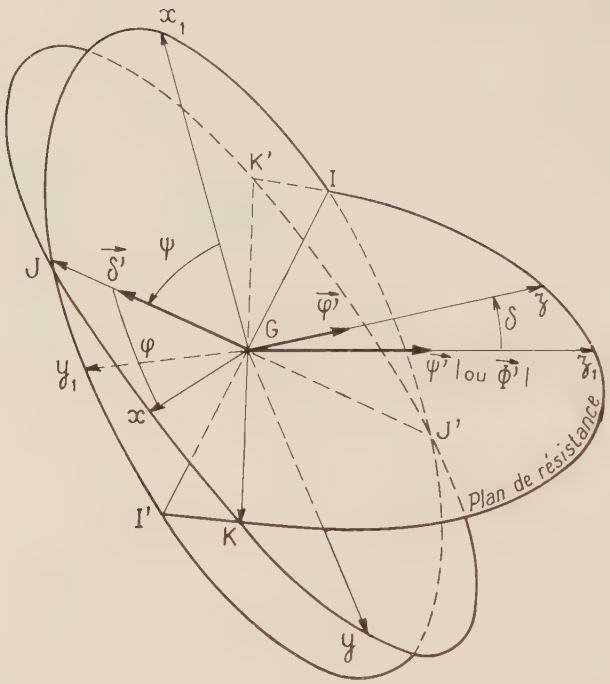


Fig. 3. — Angles d'Euler

$$\widehat{x_1 J} = \psi, \qquad \widehat{J x} = \varphi, \qquad \widehat{z_1 z} = \delta, \qquad \widehat{x_1 I} = \Phi = \psi + \frac{3\pi}{2}$$

NOTA. — Vitesse de roulis : $\omega \simeq \varphi' + \Phi'$,
Vitesse de précession Φ',
Passage du trièdre $(Gx_1y_1z_1)$ au trièdre $(Gxyz)$:

$$\widehat{x_1 x} = \varphi + \Phi + \frac{\pi}{2}.$$

(Voir B-2, page 348).

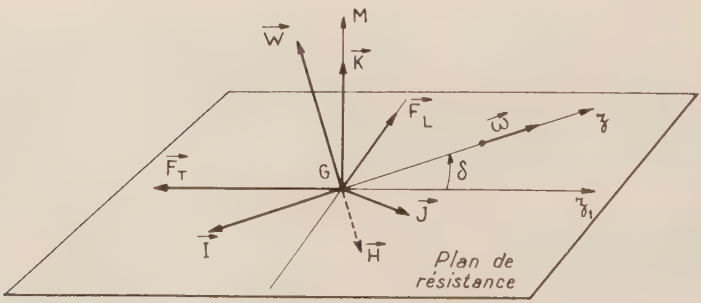


Fig. 4. — Éléments de réduction du système des forces appliquées au mobile
(Voir B-2, pages 364 et 365).

Forces et couples	Paramètres (dimensions)
A. *Forces « de compression symétrique » :*	
1. Résistance à l'avancement : $F_T = \frac{1}{4}\rho V^2 a^2 f_t\ (b, \delta)$.	
2. Force latérale :	
$F_L = \frac{1}{4}\rho V^2 a^2 f_l\ (b, \delta) \sin\delta = \varkappa m V \sin\delta$..... (dans le plan d'incidence)	$\varkappa = \frac{1}{4}\frac{\rho V a^2 f_l}{m}$, (T^{-1})
3. Moment des forces « de compression » :	
$M = \frac{1}{8}\rho V^2 a^3 f_m\ (b, \delta) \sin\delta = \mu \sin\delta$.....	$\mu = \frac{1}{8}\rho V^2 a^3 f_m$, (ML^2T^{-2})
B. *Forces « de viscosité » :*	
1. Couple axial : $I_r = \frac{1}{16}\rho V \omega a^4 f_t = \Gamma C \omega$.....	$\Gamma = \frac{1}{16}\frac{\rho V a^4 f_t}{C}$, (T^{-1})
2. Couple transversal :	
$J = \frac{1}{16}\rho V \omega a^4 f_j \sin\delta = \gamma C \omega \sin\delta$.....	$\gamma = \frac{1}{16}\frac{\rho V a^4 f_j}{C}$, (T^{-1})
3. Force normale :	
$K = \frac{1}{8}\rho V \omega a^3 f_k \sin\delta = \lambda m V \omega \sin\delta$.....	$\lambda = \frac{1}{8}\frac{\rho a^3}{m} f_k$, (0)
C. *Changement d'orientation de l'axe du mobile :*	
Couple antagoniste $H = \frac{1}{16}\rho VW a^4 f_{II} = hAW$.....	$h = \frac{1}{16}\frac{\rho V a^4}{A} f_{II}$, (T^{-1})

— *la force latérale* $\overrightarrow{F_L}$, perpendiculaire à la vitesse dans le plan de résistance (Gzz_1) et qui a pour affixe,

$F_L e^{i\Phi} = \varkappa m V \zeta$, dans le plan complexe (Gx_1y_1);

— *la force de* MAGNUS $\overrightarrow{K}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{F_L}$ dans le plan (Gx_1y_1), et qui a pour affixe,

$K e^{i\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right)} = i\lambda m V \omega \zeta$, dans le plan complexe (Gx_1y_1).

f. Le moment résultant du système des forces appliquées est la somme des moments de quatre couples :

— *Le couple « des forces de compression »* de moment $\overrightarrow{M}$, perpendiculaire au plan de résistance et qui a pour affixe :

$M e^{i\varphi} = \mu \sin\delta\, e^{-i\varphi} = \mu \zeta e^{-i(\varphi+\Phi)}$, dans le plan complexe (Gxy), dans le cas des mobiles empennés M est en principe *stabilisant* ($\mu < 0$);

— *le couple antagoniste* des mouvements de *rotation* autour de Gz de moment $\overrightarrow{I}$, et porté par $\overrightarrow{Gz}$, et qui a pour mesure :

$$I = \Gamma c \omega, \qquad \text{suivant} \qquad \overrightarrow{Gz};$$

— *le couple de* MAGNUS de moment $\vec{J}$, perpendiculaire à Gz dans le plan de résistance et qui a pour affixe,

$$J e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \gamma c\,\omega \sin\delta e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = i\,\gamma c\,\omega\,\zeta e^{-i(\varphi+\Phi)},$$

dans le plan complexe (Gxy);

— *le couple antagoniste* des mouvements de tangage/lacet de l'axe Gz à la vitesse angulaire W, son moment est $\vec{H}$ qui a pour affixe,

$H = hAW$, dans le plan complexe (Gxy).

g. Pour résoudre les équations auxquelles conduisent ces hypothèses, la balistique classique admet souvent des *hypothèses complémentaires* et en particulier :

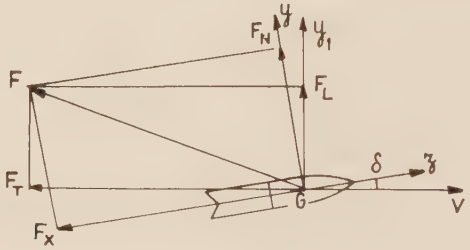


Fig. 5. — Relations entre les paramètres balistiques et aérodynamiques

F_T et F_L sont mesurés parallèlement et perpendiculairement à *la vitesse.*

Ces forces sont très voisines des forces mesurées par les aérodynamiciens, parallèlement et perpendiculairement à *l'axe du mobile :*

1° La traînée :

$$F_X = \frac{\pi}{8}\rho V^2 a^2 C_x(b,\delta) \simeq F_T - F_L \sin\delta ;$$

2° La force normale :

$$F_N = \frac{\pi}{8}\rho V^2 a^2 C'_N(b,\delta)\sin\delta \simeq F_L + F_T \sin\delta \simeq$$

$$\frac{\pi}{8}\rho V^2 a^2 [C'_z(b,\delta) + C_x(b,\delta)]\sin\delta ;$$

3° Le moment :

$$M = \frac{\pi}{8}\rho V^2 a^3 C'_M(b,\delta)\sin\delta.$$

Il en résulte que :

$$f_t - f_l \sin^2\delta = \frac{\pi}{2} C_x, \qquad f_l = \frac{\pi}{2} C'_z \simeq \frac{\pi}{2}(C'_N - C_x),$$

$$f_m = \pi C'_M,$$

$$l_g = \frac{M}{aF_N} = \frac{C_M}{C_N} \simeq \frac{\mu}{\varkappa m V a}\left(\frac{C'_N - C_x}{C'_N}\right).$$

NOTA. — La force latérale F_L est synonyme de la portance.

— *la linéarité* des forces et des couples vis-à-vis de l'obliquité, c est-à-dire, la constance de μ, $\varkappa$, h... au cours d'une même période d'oscillation de δ, et dans le cas des empennés pour toutes les valeurs de l'orientation des ailettes par rapport au plan de résistance ;

— *la faible variabilité* des coefficients le long de la trajectoire, et parfois aussi, la *faible courbure* de la trajectoire.

h. Par ailleurs les balisticiens ont l'habitude d'associer aux grandeurs

$$\varkappa,\ \mu,\ \Gamma,\ \gamma,\ \lambda,\ h,$$

des coefficients sans dimension : (voir fig 4 et 5)

$$f_l,\ f_m,\ f_i,\ f_j,\ f_k,\ f_h,$$

comparables aux *coefficients aérodynamiques* C_z', C_M' . . . Enfin, la *marge statique*, comptée en calibres, est représentée par $l_g = \frac{C_M}{C_N'}$.

1.3. Hypothèses complémentaires.

1.3.1. *Critique des hypothèses classiques.*

a. Nous admettrons provisoirement, *sous réserve de justifications* données aux paragraphes 2-5 et 2-6, les hypothèses suivantes :

— indifférence des mouvements du mobile vis-à-vis des *fluctuations des forces* et des moments aérodynamiques provoquées par la variation de l'orientation des ailettes par rapport au plan de résistance;

— indifférence des mouvements du mobile vis-à-vis des *fluctuations* du *moment cinétique que pourrait provoquer* une certaine différence entre les moments A et B;

— *linéarité* des forces aérodynamiques et du *moment stabilisant* vis-à-vis de l'incidence.

b. Mais l'expérience et la théorie montrent que les bienfaits apportés par la rotation lente aux mobiles empennés, et l'apparition de la solution de certains incidents au cours de la mise au point de divers types de projectiles empennés, ne peuvent s'expliquer sans faire *intervenir les imperfections de symétrie* dans l'étude du phénomène.

Il paraît prudent, de même, *de prendre en considération la variabilité des coefficients* pour l'étude de *l'amortissement* de la nutation[1].

1.3.2. *Les imperfections de symétrie* (voir fig. 6 *a* et 6 *b*).

Les hypothèses classiques admettent la *linéarité* des moments et forces appliqués au projectile en fonction de l'incidence présentée par la vitesse avec un seul et même axe : l'axe longitudinal et principal d'inertie $\overrightarrow{Gz}$.

[1] Tout au moins dans l'état, actuellement limité, de nos connaissances sur les coefficients de Magnus f_j et f_k des projectiles empennés.

a. Ces hypothèses ne sont plus valables si le mobile présente des balourds notables ou encore si, dans le cas des projectiles empennés, l'empennage n'est pas aligné avec le corps du projectile.

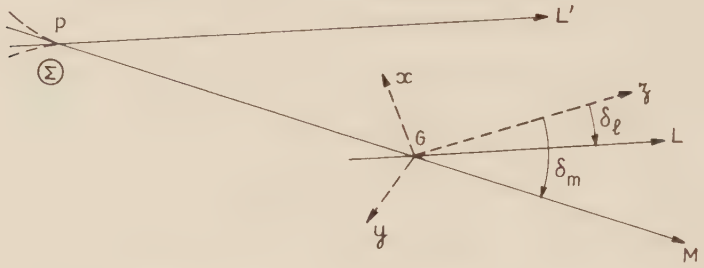


Fig. 6*a*. — Axes et angles caractéristiques des dissymétries du mobile

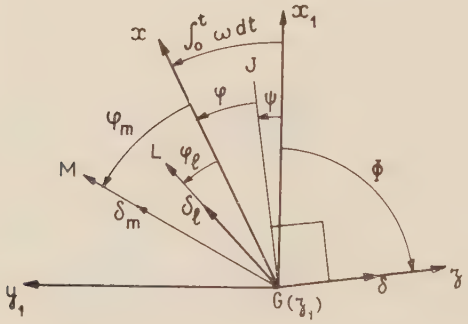


Fig. 6*b*. — Projection des axes sur le plan (Gx_1y_1) (au 2e ordre près).

Nous allons supposer que, si les obliquités restent modérées, *la linéarité* de chaque moment ou de chaque force est conservée, et cette linéarité n'est plus *associée* à l'axe principal d'inertie $\overrightarrow{Gz}$ mais à un *axe lié au mobile voisin de* $\overrightarrow{Gz}$, *et particulier à chaque élément de réduction.*

b. Ainsi, *la force latérale* sera nulle lorsque la vitesse sera parallèle à « *un axe de force latérale nulle* » $\overrightarrow{GL}$, voisin de $\overrightarrow{Gz}$ et lié au mobile. *Par définition*, la position de $\overrightarrow{GL}$ par rapport à l'axe principal d'inertie $G\vec{z}$ sera repérée par l'imaginaire : $\delta_l e^{i\varphi_l}$ qui mesure dans le plan complexe (Gxy) la projection parallèlement à $\overrightarrow{Gz}$ d'un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{GL}$.

La projection de ce vecteur unitaire, parallèlement à $\overrightarrow{Gz_1}$, dans le plan complexe (Gx_1y_1), a pour affixe au deuxième ordre près :

$$\zeta_l = \delta_l\, e^{\,i\left(\varphi_l+\varphi+\Phi+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Par hypothèse, lorsque le mobile occupe une position quelconque par rapport à sa vitesse, la force latérale $\vec{F_l}$ est perpendiculaire à $\vec{Gz_1}$, dans le plan défini par $\vec{Gz_1}$ et $\vec{GL}$ et elle a pour composantes au deuxième ordre près :

$$\varkappa m V \left[\delta e^{i\Phi} + \delta_l e^{i\left(\varphi_l + \varphi + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)} \right] = \varkappa m V (\zeta + \zeta_l),$$

dans le plan complexe $(G x_1 y_1)$,

O, suivant l'axe $\overrightarrow{Gz_1}$.

NOTA. — On vérifie que la force latérale s'annule lorsque $\overrightarrow{GL}$ est couché sur la vitesse, c'est-à-dire lorsque $\zeta = -\zeta_l$.

c. De même, *le couple* $\vec{M}$ sera nul lorsque le support de la vitesse sera confondu avec un « *axe de moment nul* » $\overrightarrow{GM}$ passant par le centre de gravité et par le centre de poussée P des forces de compression symétrique — (ou plus exactement $\overrightarrow{GM}$ est tangent à la focale métacentrique Σ).

Par définition, la position de $\overrightarrow{GM}$ par rapport à l'axe principal d'inertie $\vec{Gz}$ sera repérée par l'imaginaire

$$\delta_m e^{i\varphi_m}$$

qui mesure dans le plan complexe (Gxy), la projection parallèlement à $\vec{Gz}$ d'un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{GM}$.

La projection de ce vecteur, parallèlement à $\overrightarrow{Gz_1}$, dans le plan complexe (Gx_1y_1), a pour affixe au deuxième ordre près :

$$\zeta_m = \delta_m e^{i\left(\varphi_m + \varphi + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Par hypothèse, le couple $\vec{M}$ est directement perpendiculaire au plan $(Gz\,M)$ son moment a pour composantes, au deuxième ordre près :

$$\mu (\zeta + \zeta_m) e^{-i(\varphi + \Phi)},$$

dans le plan complexe (Gxy),

O, suivant $\overrightarrow{Gz}$.

NOTA. — On vérifie que le moment M s'annule lorsque $\overrightarrow{GM}$ est couché sur la vitesse, c'est-à-dire lorsque $\zeta = -\zeta_m$.

d. En toute rigueur, il faudrait définir aussi les imperfections de symétrie que peuvent présenter les *autres éléments de réduction* c'est-à-dire les imaginaires ζ_h, ζ_i, ζ_j, ζ_k associées à $\vec{H}$, $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$.

Nous verrons que ces éléments de réduction jouent, par rapport à $\vec{F_l}$ et $\vec{M}$

un rôle assez secondaire. *Nous supposerons* que ce rôle ne changera pas de nature avec les dissymétries du mobile. Nous accepterons donc provisoirement les hypothèses classiques concernant H, I, J, K, sous réserve de justifications données au paragraphe 2-2.1.

NOTA. — Le couple axial I n'est vraisemblablement pas indépendant de l'incidence. Le coefficient I' pourrait ainsi être affecté de fluctuations plus ou moins importantes liées à la valeur instantanée de δ (effet de « turbine à aubes » de certains empennages).

1. *Remarques sur les dissymétries de masse (Voir fig. 7).*

a. La rotation du mobile, à la vitesse ω autour d'un *axe de référence* voisin de $G\vec{z}$, engendre un système de forces appliquées dont l'intensité est proportionnelle à ω^2.

Ce système peut se réduire à une force et à un couple qui mesurent respectivement et *par définition,* lorsque $\omega = 1$ rd/s, le « balourd statique » et le « balourd dynamique » (ou supplément de balourd dynamique) du mobile par rapport à l'axe de référence. Ainsi le balourd statiqne est égal au produit de la masse m du mobile par l'excentricité $\boxed{E}$ de son centre de gravité vis-à-vis de l'axe de référence [1].

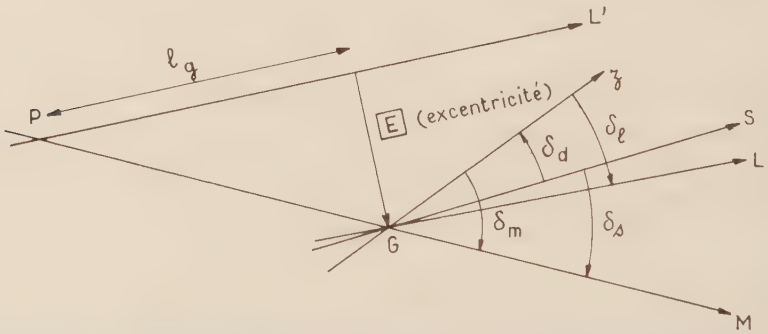


Fig. 7. — Cas d'un mobile ayant une symétrie de forme presque rigoureuse et une dissymétrie massique notable

Mais ce système peut aussi se réduire à deux forces, et dans le cas où l'axe de référence est celui d'une machine de contrôle d'équilibrage, on prendra comme éléments de réduction les deux forces exercées par le mobile sur les portées de cette machine. Lorsque $\omega = 1$ rd/s, ces deux forces mesurent deux moments de masse, ou « balourds » élémentaires associés à chacun des deux plans de contrôle de la machine.

On remarque que la résultante et le moment résultant de ces deux forces

[1] Pour certains auteurs c'est l'excentricité $\boxed{E}$ du centre de gravité qui constitue par définition le « balourd statique », (I.-G. Besse, I.-C. Elghozi). Mais les définitions proposées ici pour les balourds statiques et dynamiques ont le mérite d'être homogènes entre elles.

ont respectivement pour valeur le « balourd statique » et le « balourd dynamique » du mobile par rapport à l'axe de la machine.

b. Pratiquement l'axe de référence est défini sur le mobile par ses deux portées de centrage sur la machine, et ces portées sont généralement repérées sur le profil extérieur du mobile.

Dans le cas souhaitable des *faibles dissymétries* de *forme*, qui est celui des projectiles résistants au tir dont le profil extérieur a été usiné avec soin, cet axe de référence est très voisin de l'axe $\overrightarrow{PL'}$, issu du centre de poussée des forces aérodynamiques P et parallèle à l'axe de force latérale nulle $\overrightarrow{GL}$.

c. Soit $\overrightarrow{GS}$ la direction exacte de cet axe de référence, voisine de celle de $\overrightarrow{GL}$, on pose :

$$(GS, Gz) = \delta_d, \quad (GS, GM) = \delta_s.$$

Les angles δ_d et δ_s sont contenus dans des plans d'argument respectif φ_d et φ_s, et on a :

$$\zeta_m = \left[- \delta_d e^{i\varphi_d} + \delta_s e^{i\varphi_s} \right] e^{i\left(\varphi+\Phi+\frac{\pi}{2}\right)} = \zeta_s - \zeta_d.$$

Mais comme $\overrightarrow{Gs}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont voisins on a aussi :

$$\zeta_l = \zeta_m - \zeta_s \simeq - \zeta_d.$$

Il est à remarquer que :

1° L'angle δ_s provient de l'excentricité $\boxed{E}$,

$$\delta_s = \frac{\text{mesuré sur machine de contrôle d'équilibrage}}{(-l_g) \text{ mesuré en soufflerie ou au tir}};$$

2° L'angle δ_d caractérise la divergence angulaire entre l'axe principal d'inertie $\overrightarrow{Gz}$ et l'axe de référence, à laquelle correspond le « *balourd dynamique* »,

$$\delta_d = \frac{\text{couple appliqué à la machine de contrôle d'équilibrage}}{(A - C)\,\omega^2}.$$

Les imperfections ζ_l et ζ_m *sont donc indirectement accessibles à la mesure.*

d. Notons aussi qu'en toute rigueur les imperfections de symétrie caractérisées par ζ_l et ζ_m introduisent généralement une légère *différence entre les moments d'inertie transversaux A* et *B* (dont les effets étudiés par l'I.M.G. Sutterlin seront exposés plus loin (paragraphe 2-5).

1.3.4. *Remarques sur certaines hypothèses anglo-saxonnes.*

a. L'école américaine prend parfois en considération un *système complémentaire* de forces directement appliquées au mobile, pour tenir compte de

toutes les modifications que pourrait subir le système des forces $\vec{F_T}$, $\vec{F_L}$, $\vec{K}$ et les couples $\vec{M}$, $\vec{I}$, $\vec{J}$ du fait des mouvements de l'axe $\vec{Gz}$.

Ce système complémentaire comprend, en plus du couple $\vec{H}$ déjà retenu par les balisticiens français et anglais, *2 couples et 3 forces*. Mais l'expérience a conduit les Américains à négliger ces nouveaux éléments de réduction dans la suite des calculs. Nous les imiterons.

b. Des théories récentes retiennent l'hypothèse d'un moment stabilisant aérodynamique dont la valeur serait une fonction cubique de l'incidence :

$$M = K_1 \delta + K_3 \delta^3. \quad (1)$$

Cette façon de faire permet de tenir compte d'un défaut éventuel de linéarité du moment M, mais la forme cubique n'a pas été retenue ici car dans le cas de projectiles supersoniques expérimentés l'hypothèse de linéarité est apparue suffisamment satisfaisante.

c. On pourrait faire encore d'autres critiques aux hypothèses classiques :

— elles ne rendent pas compte du caractère aléatoire des écoulements;

— elles préjugent du maintien de bien des caractéristiques de l'écoulement lors du passage aux régimes dynamiques...; cependant ces hypothèses ainsi précisées et complétées nous paraissent suffisamment explicatives des phénomènes expérimentés.

1.4. Valeurs numériques.

L'ordre de grandeur des paramètres associés aux mobiles empennés supersoniques à faible vitesse de rotation peut être illustré par les valeurs numériques correspondant à un « *projectile de référence* ».

Ces valeurs purement indicatives, mais dont l'ordre de grandeur correspond à des projectiles effectivement expérimentés, sont précisées dans le tableau I.

(1) Voir [B4 et B5].

TABLEAU I. — VALEURS NUMÉRIQUES

DES PARAMÈTRES ASSOCIÉS À UN « PROJECTILE DE RÉFÉRENCE »

(Unités du système légal)

Paramètres fondamentaux	Valeurs numériques	Unités
Calibre a	10^{-1}	m
Masse m	5	kg
Moment d'inertie A	6.10^{-2}	kg m^2
Moment d'inertie C	6.10^{-3}	kg m^2
V moyen	10^3	m/s
ω moyen $\left(\text{et } \frac{C}{2A}\,\omega\right)$	200 (et 10)	rd/s
C_x moyen	0,3	
C'_N moyeu	5	
l_g moyen	0,5	
f_{II}	100	
$\lvert \omega' \rvert = \lvert d\omega/dt \rvert$	< 50	rd/s^2
$\lvert l'_g \rvert = \lvert dl_g/dt \rvert$	$< 0,10$	s^{-1}
Paramètres déduits des paramètres fondamentaux		
$V'/V = \frac{\pi}{8}\frac{a^2}{m}\rho V C_x$	0,31	s^{-1}
$\varkappa = \frac{\pi}{8}\frac{a^2\rho}{m} V (C'_N - C_x)$	3,8	s^{-1}
$\mu = \frac{\pi}{8}\rho V^2 a^3 l_g C'_N$	$-9,5 . 10^2$	mN
$\varkappa + h = \varkappa + \frac{1}{16}\frac{\rho V a^4}{A} f_{II}$	20,4	s^{-1}
$\lvert \Gamma \rvert = \left\lvert \frac{\omega'}{\omega} \right\rvert$	$< 0,3$	s^{-1}
$\lvert l'_g/l_g \rvert$	$< 0,4$	s^{-1}
$\sqrt{-\mu/A}$ (et $\omega_c = \sqrt{-\mu/A - C}$)	126 (et 133)	s^{-1}
$N = \frac{2A}{C}\frac{\sqrt{-\mu/A}}{\omega}$	13	
$\Lambda_N = \pi V \sqrt{\frac{A}{-\mu}}\left[1 - \frac{1}{8}\frac{\left(\omega\frac{C}{A}\right)^2 - (\varkappa - h)^2}{\left(-\frac{\mu}{A}\right)}\right]$	25	m
$\frac{\omega}{\omega_c}$	1,5	s^{-1}
$\varkappa (A/-\mu)$	$2,4 . 10^{-4}$	s^{-1}
$\varkappa (\varkappa + h)\left(\frac{A}{-\mu}\right)$	$0,49 . 10^{-2}$	

DEUXIÈME PARTIE

LES MOUVEMENTS AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ

MISE EN ÉQUATION.

CONDITIONS DE STABILITÉ, PÉRIODICITÉ ET AMORTISSEMENT.

INCIDENCE RÉSIDUELLE.

INFLUENCE ÉVENTUELLE DES FLUCTUATIONS ET DES DÉFAUTS DE LINÉARITÉ DU MOMENT STABILISANT.

NATURE ET ALLURE DES MOUVEMENTS AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ.

2.1. Mise en équation.

Aux hypothèses près, le schéma de la mise en équation du mouvement autour du centre de gravité est classique. Le lecteur se reportera, en particulier, au cours de M. l'Ingénieur général Besse [B-2, chapitre VII].

2.1.1. *Vecteur rotation* $\vec{\theta}$ *et moment cinétique* $\vec{G\sigma}$.

Le *vecteur rotation absolue* $\vec{\theta}$ du mobile peut être défini par ses composantes $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ suivant les 3 axes Gx, Gy et Gz liés au mobile. On a :

— dans le plan complexe (Gxy) :

$$W = p + iq = (\zeta' + \tau' + i\eta' \cos\tau)\, e^{-i(\varphi+\Phi)} ;$$

— et suivant $\vec{Gz}$:

$$r = \varphi' + \Phi' - \eta' \sin\tau \simeq \varphi' + \Phi' = \omega.$$

L'ellipsoïde d'inertie du mobile étant caractérisé par les moments d'inertie A, B, C, *le moment cinétique* aura pour valeur :

$$\vec{G\sigma} = A\vec{p} + B\vec{q} + C\vec{r},$$

ou encore, puisque A et B sont considérés comme égaux,

$$\overrightarrow{G\sigma} = \overrightarrow{AW} + \overrightarrow{C\omega}.$$

2.1.2. *Éléments de réduction du système des forces appliquées.*

Étant donné les hypothèses choisies, le système des forces appliquées au mobile est équivalent à :

a. 4 forces, dont les composantes, suivant les axes du trièdre $(Gx_1\ y_1\ z_1)$ lié à la vitesse, sont données au 2e ordre près par le tableau suivant :

Forces	Pesanteur	$\overrightarrow{F_T}$	$\overrightarrow{F_L}$	$\overrightarrow{K}$	Somme des Forces
Composantes dans le plan $(G x_1 y_1)$.....	$-mg\cos\tau$	0	$\varkappa m V(\zeta+\zeta_l)$	$i\lambda m V\omega\zeta$	$\mathfrak{F}_{x_1}+i\mathfrak{F}_{y_1}$
Composantes suivant $\overrightarrow{Gz_1}$.	$-mg\sin\tau$	$-F_T$	0	0	$\mathfrak{F}_{z_1}$

b. 4 couples, dont les moments admettent, au 2e ordre près, par projection sur le trièdre $(Gxyz)$ lié au mobile, les composantes suivantes :

Couples	$\overrightarrow{M}$	$\overrightarrow{I}$	$\overrightarrow{J}$	$\overrightarrow{H}$	Somme des couples
Composantes dans le plan (Gxy)..	$\mu[\zeta+\zeta_m]\,e^{-i(\varphi+\Phi)}$	0	$i\gamma C\omega\zeta e^{-i(\varphi+\Phi)}$	$-h\,AW$	$\mathfrak{M}_x+i\mathfrak{M}_y$
Composantes suivant $\overrightarrow{Gz}$.....	0	$-\Gamma C\omega$	0	0	$\mathfrak{M}_z$

2.1.3. *Applications des équations de la mécanique rationnelle.*

Le théorème des quantités de mouvement appliqué au mobile s'écrit :

$$\left(m\overrightarrow{V}\right)'_{\text{absolu}} = \overrightarrow{\mathfrak{F}}_{x_1} + \overrightarrow{\mathfrak{F}}_{y_1} + \overrightarrow{\mathfrak{F}}_{z_1},$$

et la projection de cette relation vectorielle sur (Gx_1y_1) et sur $\overrightarrow{Gz_1}$ conduit aux équations :

(1)
$$m V(\tau' + i\eta'\cos\tau) = \mathfrak{F}_{x_1} + i\mathfrak{F}_{y_1};$$
$$m\frac{dV}{dt} = \mathfrak{F}_{z_1}.$$

Le théorème des moments cinétiques appliqué au mobile s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{G\sigma'}\right)_{\text{absolu}} = \left(\overrightarrow{G\sigma'}\right)_{GXYZ} + \overrightarrow{\theta}\Lambda\overrightarrow{G\sigma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_x} + \overrightarrow{\mathfrak{M}_y} + \overrightarrow{\mathfrak{M}_z},$$

et les projections de cette relation vectorielle sur le plan (Gxy) et sur $\overrightarrow{Gz}$ conduit aux équations :

$$\boxed{2} \qquad A W' + i\omega (A - C) W = \mathfrak{M}_x + i \mathfrak{M}_y ;$$

$$C \omega' = \mathfrak{M}_z .$$

Posons :

$$\tau = \tau_1 + \delta\tau, \qquad \Delta = \delta\tau + i\eta \cos\tau_1 .$$

L'imaginaire Δ repère [1] *la déviation* de la vitesse $\overrightarrow{GV}$ de la trajectoire altérée (T), par rapport à la vitesse $\overrightarrow{G_1V_1}$ de la trajectoire non altérée (T_1).

Remarquons d'autre part que, dans le cas des tirs de plein fouet avec de courtes durées de trajet, nous avons :

$$\tau_1' = -g \frac{\cos\tau_1}{V_1} \sim -g \frac{\cos\tau}{V}, \quad (\cos\tau)' \sim 0.$$

Remplaçons maintenant dans $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ les imaginaires $\mathfrak{F}_{x_1} + i\mathfrak{F}_{y_1}$ et $\mathfrak{M}_x + i\mathfrak{M}_y$ par leurs valeurs. Il vient :

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\Delta' = \varkappa (\zeta + \zeta_l) + i\lambda\omega\zeta} ,$$

et

$$\zeta'' + \Delta'' + \tau_1'' - i\frac{C}{A}\omega (\zeta' + \Delta' + \tau_1') =$$
$$- \left(\frac{-\mu}{A}\right)(\zeta + \zeta_m) + i\omega\frac{C}{A}\gamma\zeta - h(\zeta' + \Delta' + \tau_1') \quad [2].$$

Explicitons Δ' et Δ'' dans cette dernière relation. Il vient, en négligeant les dérivées de $\varkappa$ et de $\lambda\omega$:

$$\boxed{4} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\zeta'' + \left[\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)\right]\zeta' + \\ &\left[\left(\frac{-\mu}{A}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)\right]\zeta = \\ &- \tau_1'' - \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)\tau_1' - \left(\frac{-\mu}{A}\right)\zeta_m - \left[h + i\omega\left(1 - \frac{C}{A}\right)\right]\varkappa\zeta_l \end{aligned}}$$

[1] Δ représente la projection orthogonale d'un vecteur unitaire porté par la vitesse $\overrightarrow{GV}$, au point $G(t)$ de la trajectoire altérée (T), sur le plan complexe (Gx_1y_1) perpendiculaire au point $G_1(t)$ à la trajectoire non altérée (T_1).

[2] Nous écrivons volontairement $-\left(\frac{-\mu}{A}\right)$ pour rappeler que dans le cas étudié $\left(\frac{-\mu}{A}\right)$ est une *quantité positive*.

2.2. Recherche des solutions (régime transitoire et régime permanent).

La solution générale de l'équation [4] est la somme :

— de la solution générale ζ_N de l'équation sans second membre, qui caractérise le régime transitoire (nutation initiale ou nutation sur la trajectoire);

— d'une solution particulière ζ_R de l'équation avec second membre, qui caractérise le régime permanent (après amortissement de la nutation) :

$$\zeta = \zeta_N + \zeta_R.$$

Dans le cas des mobiles stables (mouvement périodique amorti) :

— la solution ζ_N donne sa physionomie à la « nutation initiale » [1],

— puis après amortissement de la nutation la solution ζ_R devient la partie principale de ζ.

2.2.1. *Détermination du régime permanent.*

a. Si on suppose le régime établi, ce qui est le cas normal d'emploi après amortissement de la nutation, il vient :

$$\zeta_N = 0, \qquad \zeta'_N = 0, \qquad \zeta''_N = 0.$$

Si, de plus, le mobile ne présente pas d'imperfection de symétrie ($\zeta_l \backsimeq 0 \backsim \zeta_m$) on a alors la solution particulière :

[5]
$$\zeta_{R(\zeta_l=\zeta_m=0)} = \zeta_P = -\frac{\left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)\tau'_1 + \tau''_1}{\left(\frac{-\mu}{a}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)}.$$

qui détermine l'incidence *de «précession»* induite par la courbure moyenne de la trajectoire [1].

b. Dans le cas général où les dissymétries ne sont pas rigoureusement négligeables, on détermine la solution particulière en écrivant que :

— après nutation,

— si les paramètres évoluent lentement le long de la trajectoire, l'axe d'inertie G_z tourne à la vitesse ω autour de l'axe instantané de précession (A.I.P.) en faisant avec l'A.I.P. un angle sensiblement constant, alors que l'orientation de l'A.I.P. est définie par ζ_P. On pose donc :

$$\zeta_R = \zeta_P + \zeta_D = \zeta_P + \delta_D e^{i\left[\int_0^t \omega\, dt + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right]}.$$

[1] Les balisticiens entendent souvent par « *nutation initiale* » l'ensemble du mouvement en assiette (nutation et précession) le long de l'arc initial, et par *précession* celle qui caractérise le régime établi au-delà de l'arc initial.

Portons cette valeur de ζ_R dans | 4 |, où compte tenu de la lente évolution des paramètres on néglige ω', τ'' et ses dérivées, il vient alors :

$$\boxed{6} \quad \zeta_D = \frac{\left(\frac{-\mu}{A}\right)\zeta_m + \left[h + i\omega\left(1 - \frac{C}{A}\right)\right]\varkappa\zeta_l}{\omega^2\left(1 - \frac{C}{A}\right)(1+\lambda) - i\omega\left[\left(1 - \frac{C}{A}\right)\varkappa + (1+\lambda)h - \frac{C}{A}\gamma\right] - \varkappa h - \left(\frac{-\mu}{A}\right)}$$

Nota : Si l'hypothèse *1-3-2-d* n'avait pas été consentie, des imperfections ζ_h, ζ_i, ζ_j, ζ_k, seraient associées aux éléments de réduction $\vec{H}$, $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$. L'expression | 6 | contiendrait alors des termes de la forme :

$$\varkappa h\,\zeta_h, \qquad \frac{C}{A}\omega\gamma\,\zeta_j, \qquad \frac{C}{A}\omega\lambda\,\zeta_k.$$

Mais ces termes demeurent petits, soit en valeur absolue, soit devant $\left(\frac{-\mu}{A}\right)\zeta_m$. Ceci nous servira de *justification de l'hypothèse 1-3-2-d.*

2.2.2. *Détermination du régime transitoire* (*recherche de la solution générale* ζ_N *de l'équation sans second membre*).

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle | 4 | admet les racines :

$$r = -P \pm i\sqrt{Q},$$

avec :

$$P = \frac{1}{2}\left[\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)\right];$$

$$Q = \left\{ - \left| \frac{\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)}{2} \right|^2 + \left[\left(-\frac{\mu}{A}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)\right] \right\}.$$

L'expression de r se simplifie en remarquant que λ est petit devant $\frac{C}{A}$ (voir les valeurs numériques du tableau I) et que tous les termes sous radical sont petits devant $\left(-\frac{\mu}{A}\right)$, et que $\lambda\omega$ est petit devant $\varkappa$ et h.

Posons :

$$N = \frac{\sqrt{-\frac{\mu}{A}}}{\frac{C}{2A}\omega}.$$

Il vient :

$$\boxed{7} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = -\frac{1}{2}\left[(\varkappa + h) \pm \frac{1}{N}(h - \varkappa - 2\gamma)\right] + \\ \qquad i\left\{\frac{C}{2A}\omega \pm \sqrt{\frac{-\mu}{A}}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{\left(\frac{\omega C}{A}\right)^2 - (\varkappa - h)^2}{\left(-\frac{\mu}{A}\right)}\right]\right\}. \end{array} \right.$$

Si les coefficients de l'équation $\boxed{4}$ sont constants on aura :

$$\boxed{7\ bis} \qquad \zeta_N = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}.$$

Mais la variabilité des coefficients donnera plus exactement à ζ_N une expression de la forme :

$$\zeta_N = K_1 \exp\left[\int_0^t (r_1 + \partial r_1)\, dt\right] + K_2 \exp\left[\int_0^t (r_2 + \partial r_2)\, dt\right].$$

Le calcul [1] conduit alors aux solutions :

[1] On pose :

$$\zeta = \exp\left[\int_0^t (r + \delta r)\, dt\right],$$

où r représente la racine de l'équation caractéristique associée à $\boxed{4}$, d'où :

$$\zeta' = (r + \delta r)\,\zeta \quad \text{et} \quad \zeta'' = [r' + (r + \delta r)^2]\,\zeta,$$

(en négligeant $\delta' r$ devant δr).

On porte les valeurs de ζ, ζ', ζ'' dans l'équation simplifiée en ne conservant que les coefficients les plus importants de ζ et de ζ', et en négligeant la courbure de la trajectoire au cours de la nutation :

$$\zeta'' + \left(\varkappa + h - i\frac{C}{A}\omega\right)\zeta' + \left[\left(-\frac{\mu}{A}\right) + \varkappa\left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)\right]\zeta = 0.$$

Et en annulant la somme des termes de l'équation caractéristique, il vient :

$$\boxed{9} \qquad r' + 2r\,\delta r + \left(h + \varkappa - i\frac{C}{A}\omega\right)\delta r = 0.$$

Dans le cas des projectiles étudiés r et r' ont pour partie principale :

$$r \simeq \pm i\sqrt{\frac{-\mu}{A}}, \quad r' \simeq \left(i\frac{C}{2A}\omega\right)' \pm \left(i\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\right)' = i\left[-\frac{\Gamma}{N} \pm \left(\frac{V'}{V}\right) \pm \frac{(C'_M)'}{2(C'_M)}\right]\sqrt{\frac{-\mu}{A}}.$$

En portant les valeurs de r et de r' dans l'équation $\boxed{9}$, et compte tenu de ce que

$$\left(h + \varkappa - i\frac{C}{A}\omega\right)$$

est petit devant $\sqrt{\frac{-\mu}{A}}$ et de ce que, dans le cas étudié, $\frac{(C'_M)'}{(C'_M)} \simeq \left(\frac{l'_g}{l_g}\right)$, il vient :

$$\delta r \simeq -\frac{1}{2}\left[\mp\frac{\Gamma}{N} + \left(\frac{V'}{V}\right) + \left(\frac{l'_g}{2\,l_g}\right)\right].$$

8

$$r + \delta r = -\frac{1}{2}\left[\varkappa + h + \left(\frac{V'}{V}\right) + \left(\frac{l'_g}{2\,l_g}\right) \pm \frac{1}{N}(h - \varkappa - 2\gamma - \Gamma)\right] + i\left[\frac{C}{2A}\omega \pm \sqrt{\frac{-\mu}{A}}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\left(\frac{\omega C}{A}\right)^2 - (\varkappa - h)^2}{\left(-\frac{\mu}{A}\right)}\right)\right]$$

2.3. Conditions de stabilité balistique.

La recherche de la stabilité balistique revient à rechercher pour le régime transitoire des solutions périodiques amorties.

2.3.1. *Périodicité de* $\zeta_\backslash$.

Il faut d'abord que la solution $\zeta_\backslash$ soit périodique. Cette périodicité sera pratiquement assurée si μ *est négatif.*

En toute rigueur, il suffit d'après 7 de satisfaire à la condition :

10

$$\left(-\frac{\mu}{A}\right) + \left(\frac{C}{2A}\omega\right)^2 - \left(\frac{\varkappa - h}{2}\right)^2 > 0.$$

Mais la marge de stabilité serait très faible si cette condition était réalisée, pour de faibles valeurs de ω, avec μ positif. Les altérations induites par la nutation seraient alors inacceptables (voir troisième partie).

2.3.2. *Amortissement de* $\zeta_\backslash$.

Il faut aussi que la solution $\zeta_\backslash$ soit amortie. La condition d'amortissement est double. Il faut en effet que les parties réelles $(r_1 + \delta r_1)$, $(r_2 + \delta r_2)$ soient toutes deux négatives, c'est-à-dire que :

11

$$|\omega| < 2\frac{A}{C}\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\frac{\varkappa + h + \frac{V'}{V} + \frac{l'_g}{2\,l_g}}{|h - \varkappa - 2\gamma - \Gamma|} \quad (1).$$

a. Dans le cas où $\frac{V'}{V}$, $\frac{l'_g}{2\,l_g}$ et Γ sont petits devant h et $\varkappa$, la vitesse de roulis sera limitée par la condition :

12

$$|\omega| < 2\frac{A}{C}\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\frac{\varkappa + h}{|h - \varkappa|}$$

(1) Dans la pratique on est amené à prendre, bien entendu, des marges de sécurité par rapport aux conditions limites 11 .

qui autorise des valeurs très fortes, de l'ordre de 300 t/s par exemple, (sortant déjà nettement du domaine des vitesses lentes de roulis);

b. Dans le cas où γ est d'un ordre supérieur à $\frac{V'}{V}$, $\frac{l'_g}{2\,l_g}$, Γ et $(h - \varkappa)$, la condition 11 s'écrit :

12 *bis*

$$|\omega| < \frac{A}{C}\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\,\frac{\varkappa + h}{|\gamma|}\,.$$

Ce dernier cas est peut-être bien celui des projectiles expérimentés voisins du projectile de référence et cette condition peut être nettement plus sévère que la précédente (voir plus loin, § 2.7.1.*c*).

Nota : la relation 11 montre qu'il est difficile d'améliorer la stabilité des mobiles à faible (μ) par accroissement de ω.

2.4. Incidence résiduelle (*ou obliquité résiduelle*) [*voir fig.* 8].

2.4.1. *Limitation de l'incidence après nutation.*

La nutation initiale terminée, on a :

$$\zeta_N \simeq 0\,;$$

et la solution particulière :

$$\zeta_R = \zeta_P + \zeta_D$$

doit conserver une amplitude modérée.

Dans le cas contraire :

— les δ_R importants induisent des altérations inacceptables, (voir troisième partie);

— et au-delà d'une certaine valeur de l'incidence la valeur du couple unitaire μ peut s'effondrer et créer une instabilité.

Remarquons que, pour les mobiles animés de faibles vitesses de roulis, le long de trajectoires très tendues, ζ_P est toujours pratiquement nulle. Nous avons vu, par contre, que la valeur de ζ_D était liée à celle de ω.

Dans le cas étudié :

— λ est petit devant C/A;

— $\varkappa$, h et γ sont petits devant ω;

— $\omega\,\varkappa$ est petit devant $\left(-\frac{\mu}{A}\right)$;

et ζ_D admettra pour partie principale :

13

$$\zeta_D \simeq \frac{\left(-\frac{\mu}{A}\right)\zeta_m}{\omega^2\left(1 - \frac{C}{A}\right) - \left(\frac{-\mu}{A}\right)}\,.$$

En posant :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-\mu}{A-C}},$$

il vient :

$$\zeta_D = \frac{\zeta_m}{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1}.$$

On voit que la valeur de la *vitesse de roulis* $\omega = \omega_c$ est critique pour ζ_D. Pour cette valeur, la fonction :

$$\nu = \frac{1}{(\omega/\omega_c)^2 - 1} = \frac{\zeta_D}{\zeta_m},$$

augmente théoriquement indéfiniment.

Pratiquement, le mobile se met en vrille [1]. D'où la condition :

14 $\boxed{\omega \neq \omega_c}$.

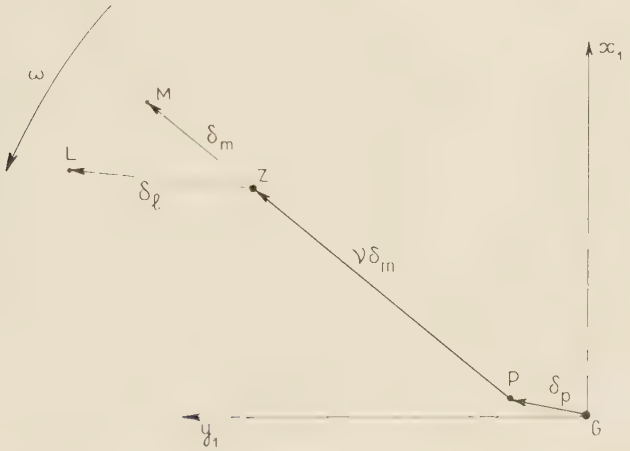


Fig. 8. — Incidence résiduelle d'un mobile dissymétrique après amortissement de la nutation. (Cas d'une faible variabilité des paramètres le long de la trajectoire.)

NOTA. — *a*. Les points P, Z, L et M représentent les projections sur le plan (Gx_1y_1), lié à la vitesse, et parallèlement à celle-ci, de l'extrémité des vecteurs unitaires portés par :

— L'axe instantané de précession A.I.P., (point P);

— L'axe principal d'inertie $\vec{Gz}$, (point Z);

— L'axe de force latérale nulle $\overrightarrow{GL}$, (point L);

— L'axe de moment nul $\overrightarrow{GM}$, (point M).

b. La figure (PZLM) tourne en bloc à la vitesse ω autour du point P.

[1] Pour $\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{-\mu}{A-C}}$ on retrouve bien la condition de mise en vrille indiquée par l'I.M.G. SUTTERLIN [B-3, page 353] :

$$\left(\frac{C}{2A}\right)(1+\sigma) \simeq 1.$$

2.4.2. *Remarque. Position de l'axe longitudinal et principal d'inertie.*

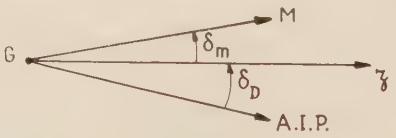
La fonction n'ayant pas de partie imaginaire, on en déduit qu'après nutation, l'axe d'inertie $\overrightarrow{Gz}$, l'axe de moment nul $\overrightarrow{GM}$ et l'A.I.P. sont *dans un même plan.*

La dérivée de la fonction ν :

$$\nu' = -\frac{2\,\omega/\omega_c}{[(\omega/\omega_c)^2-1]^2} < 0,$$

nous conduit au tableau de variations suivant dont on déduit la position de $\overrightarrow{GM}$ et de l'A.I.P.

ω/ω_c	0 ↗	1 ↗	$+\infty$
ν'	$-$	$-$	
ν	-1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	0
Position de $\overrightarrow{Gz}$	A l'extérieur de l'angle $(\overrightarrow{A.I.P.}, \overrightarrow{GM})$	A l'intérieur de l'angle $(\overrightarrow{A.I.P.}, \overrightarrow{GM})$	



2.5. Influence de certaines fluctuations de forces aérodynamiques et du moment d'inertie transversale.

2.5.1. *Origine des fluctuations.*

Des fluctuations de la force latérale F_l et du moment stabilisant M peuvent être provoquées par les variations de l'orientation des ailettes par rapport au plan d'incidence (ou « plan de résistance » des balisticiens) du fait des mouvements de roulis et de précession.

Ainsi, dans le cas extrême d'un empennage à deux ailettes, le mobile peut perdre momentanément toute stabilité, au moment où la combinaison de ces deux mouvements vient confondre le plan des ailettes avec le plan d'incidence. La stabilité du mobile est au contraire maximale au moment où les deux ailettes sont en quadrature avec le plan d'incidence.

D'une façon plus générale ce type de fluctuation peut apparaître, dans tous les cas, où les coefficients C'_M ou C'_N ne sont pas exactement de révolution autour des axes $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GL}$. Par ailleurs, la différence entre les moments d'inertie A et B entraîne aussi une fluctuation du moment cinétique.

Les effets de ces fluctuations sont examinés ci-après, en négligeant la fluctuation des termes d'amortissement, ce qui revient à négliger les effets des fluctuations de la force latérale devant ceux du moment stabilisant ou du moment cinétique.

2.5.2. *Rythme du passage des ailettes dans le plan d'incidence.*

a. Les fluctuations de la force latérale et du moment stabilisant ont été examinées par M. SUTTERLIN, et cette étude a été simplifiée en négligeant la vitesse de précession Φ' devant la vitesse de roulis ω, [B_3, p. 346].

Le raisonnement va être repris ici en précisant l'influence de la vitesse de précession sur le phénomène étudié.

b. Dans le cas général le mobile comporte n ailettes (voir fig. 9) :

— n peut être pair, il est alors posé :

$$n = 2p + 2 = 2n_1 ;$$

— n peut aussi être impair, il est posé dans ce cas :

$$n = 2q + 1 = n_1.$$

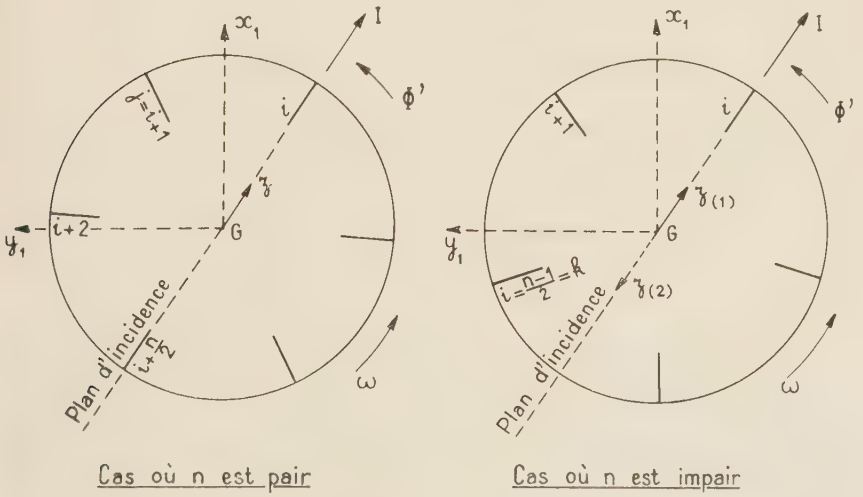


Fig. 9. — Orientation des ailettes par rapport au plan d'incidence

Les ailettes font entre elles l'angle $\boxed{A_n = \frac{2\pi}{n}}$, et pour un observateur

lié au trièdre $(Gx_1y_1z_1)$, ces ailettes tournent à la vitesse ω (vitesse de roulis) alors que le plan d'incidence tourne à la vitesse de précession Φ'.

Pour un observateur lié au plan d'incidence, les ailettes tournent donc à la vitesse $(\omega - \Phi')$.

c. Dans le cas où n *est pair,* à l'instant t_i les ailettes de rang i et $i' = i + \frac{n}{2}$ sont simultanément confondues avec le plan d'incidence.

Les ailettes de rang $j = i + 1$ et $j' = i + 1 + \frac{n}{2}$, sont simultanément confondues avec le plan d'incidence à l'instant t_j tel que :

$$(\omega - \Phi')(t_j - t_i) = A_n = \frac{2\pi}{n}.$$

La période T au rythme de laquelle les paires d'ailettes vont être successivement confondues avec le plan d'incidence, a donc pour valeur :

$$T = t_j - t_i = \frac{2\pi}{n(\omega - \Phi')} = \boxed{\frac{2\pi}{2n_1(\omega - \Phi')}}.$$

d. Dans le cas où n *est impair,* à l'instant t_i l'ailette de rang i est seule confondue avec le plan d'incidence.

C'est ensuite à l'ailette de rang $k = i + \frac{n-1}{2}$ d'être confondue avec le plan d'incidence, à l'instant t_k tel que :

$$(\omega - \Phi')(t_k - t_i) = -\left(\frac{n-1}{2}\right) A_n + \pi = \frac{\pi}{n}.$$

La période T, au rythme de laquelle les ailettes sont confondues successivement et indépendamment avec le plan d'incidence, a dans ce cas pour valeur :

$$T = t_k - t_i = \frac{\pi}{n(\omega - \Phi')} = \boxed{\frac{2\pi}{2n_1(\omega - \Phi')}}.$$

2.5.3. *Nouvelle expression de la force latérale et du moment stabilisant.*

a. Si les coefficients C'_N et C'_M, ou les coefficients $\varkappa$ et μ *ne sont pas de révolution* autour des axes $\vec{GL}$ et $\vec{GM}$, *du fait de l'orientation des ailettes* par rapport au plan d'incidence, *la variation dans le temps* de cette *orientation* provoquera des fluctuations de $\varkappa$ et de μ, et par suite des fluctuations de F_L et M.

Ces *fluctuations présenteront la période T* qui définit le rythme de passage des ailettes dans le plan d'incidence. Les mesures en soufflerie montrent que ces fluctuations sont généralement de très faible amplitude, et en *première approximation l'allure de ces fluctuations* peut être considérée comme *sinusoïdale.*

Ceci conduit à écrire :

15

$$F_L = \varkappa \zeta m V [1 + \theta_1 \sin 2 n_1 (\omega - \Phi') t],$$
$$M = \mu \zeta [1 + \theta_2 \sin 2 n_1 (\omega - \Phi') t],$$

expressions où les quantités θ_1 et θ_2 sont petites devant l'unité (moins de 5 % pour un empennage à 6 ailettes ou plus).

b. Dans le cas où n est impair, la valeur de $C_\backslash$ peut, en toute rigueur ne pas être exactement la même selon que $\overrightarrow{Gz}$ occupe la position $\overrightarrow{Gz}_{(1)}$ ou la position de $\overrightarrow{Gz}_{(2)}$ (voir la fig. 9), c'est-à-dire selon que l'ailette qui rentre dans le plan d'incidence est située soit dans le demi-plan d'incidence contenant $\overrightarrow{Gz}$, soit dans le demi-plan opposé. Il en résulte une fluctuation de période 2 T, vraisemblablement de très faible amplitude et qui peut être négligée devant la fluctuation de période T.

c. Avec des mobiles ne présentant que de faibles imperfections de symétrie, c'est la solution générale $\zeta_\backslash$ qui donne sa physionomie au mouvement en incidence autour du centre de gravité. $\zeta_\backslash$ présente généralement des nœuds d'amplitude sensiblement nulle. C'est le cas, en particulier, des nutations initiales provoquées brutalement par les perturbations qui accompagnent le largage au moment où :

$$\zeta_0 \simeq \zeta_{(t=0)} \simeq 0.$$

La solution (voir § 2.2.2.) :

7 *bis*

$$\zeta_N = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} = \delta_N e^{i(\Phi'_N t + \Phi_0)}$$

sera dans ce cas telle que :

7 *ter*

$$K_1 \simeq K_2, \quad \text{et} \quad \Phi'_N = \left(\frac{C}{A} - \lambda\right)\frac{\omega}{2} \simeq \frac{C}{2A}\omega.$$

En posant :

$$n_2 = 2\left(1 - \frac{C}{2A}\right) n_1,$$

il vient :

16

$$M = \mu \zeta (1 + \theta_2 \sin n_2 \omega t)$$

Il faut d'ailleurs remarquer que $\frac{C}{A}$ est généralement de l'ordre de $\frac{1}{10}$ (donc $n_2 = 2\, n_1$ à 5 % près). C'est ce qui avait conduit M. Sutterlin, à négliger la vitesse de précession et à écrire :

$$M \simeq \mu \zeta (1 + \theta_2 \sin 2 n_1 \omega t) \qquad [B.\ 3,\ p.\ 347].$$

2.5.4. *Influence de ces fluctuations sur le mouvement du mobile.*
(Cas des mobiles suffisamment symétriques).

a. S'il n'est pas tenu compte des facteurs d'amortissement, l'équation simplifiée du mouvement en incidence s'écrira maintenant en tenant compte de la fluctuation de M définie par la relation [16] :

$$\boxed{17} \qquad \zeta'' - i\frac{C\omega}{A}\zeta' + \left(\frac{-\mu}{A}\right)(1 + \theta_2 \sin n_2\,\omega\, t)\,\zeta = 0.$$

M. Sutterlin a montré qu'une équation de cette forme se ramènerait à une équation de Mathieu [B.3 — p. 357].

En effet, en effectuant les changements de variables :

$$U = \zeta e^{-i\frac{C}{2A}\omega t}, \qquad Z = n_2\frac{\omega}{2}t + \frac{\pi}{4}, \qquad p = \frac{C^2\omega^2 + \mu A(-\mu)}{n_2^2 A^2 \omega^2}, \qquad q = 2\frac{(-\mu)\theta_2}{n_2^2 A\omega^2},$$

l'équation [17] s'écrit :

$$U''_{(z)} + (p - 2q\cos 2z)\,U_{(z)} = 0.$$

b. La discussion de cette équation [B.3, p. 379], met alors en évidence, comme un raisonnement intuitif le laisserait prévoir, certains *risques de résonance* se présentant pour des valeurs critiques ω_n de la vitesse de roulis définies par :

$$\omega_n \sim \frac{2}{Kn_2}\sqrt{\frac{-\mu}{A}} \qquad \text{avec} \qquad K = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$$

Ce risque de résonance disparaît très rapidement dès que ω s'écarte de la valeur ω_n et les zones critiques de résonance sont d'autant plus étroites que θ_2 est faible ou que K est grand.

Il faut noter que dans le cas (qui est celui du projectile de référence) où ω est maintenu au-dessus de la valeur :

$$\omega_c \sim \sqrt{\frac{-\mu}{A - C}},$$

le risque d'une telle résonance est rigoureusement nul.

2.5.5. *Cas où les imperfections de symétrie ne sont pas négligeables.*

a. Avec les mobiles qui présentent de par leur fabrication, ou du fait du tir, des imperfections de symétrie notables, l'obliquité ζ_D peut devenir prépondérante devant ζ_P et ζ_N. On a vu que Φ'_D tend vers ω (voir fig. 8), et dans ce cas il en sera de même de Φ'. L'orientation des ailettes par rapport au plan d'incidence tend donc à se figer, elle ne peut alors provoquer la fluctuation de M et de F_L.

b. Mais l'obliquité ζ_N peut demeurer prépondérante par rapport à ζ_D. Le défaut de symétrie lié au mobile tournera alors à la vitesse :

$$(\omega - \Phi') \simeq \left(1 - \frac{C}{2A}\right)\omega$$

par rapport au plan d'incidence. Si le défaut de symétrie est un défaut de forme le coefficient de moment C'_n associé à l'axe de moment nul $\overrightarrow{GM}$, peut n'être plus de révolution autour de cet axe.

Il en résulte pour le moment M une fluctuation de période :

$$T = \frac{2\pi}{n_3\,\omega} \quad \text{avec} \quad n_3 \simeq 2\left(1 - \frac{C}{2A}\right).$$

Le moment M est dans ce cas de la forme :

$$M = \mu\zeta\,(1 + \theta_2 \sin n_2\,\omega t + \theta_3 \sin n_3\,\omega t),$$

et les risques de résonance paraissent toujours nuls si $\omega > \omega_c$.

2.5.6. *Influence d'une différence entre les moments d'inertie A et B.*

Une organisation particulière du mobile (symétrie d'ordre 2 de certaines dispositions intérieures ou extérieures), et surtout les imperfections de symétrie évoquées plus haut, entraînent une différence entre les moments d'inertie A et B.

Il en résulte une fluctuation du moment cinétique du mobile, au rythme du passage des axes principaux et transversaux d'inertie dans le plan d'incidence.

M. Sutterlin a montré [B. 3, p. 349] que la différence entre A et B conduit de nouveau à une équation simplifiée de la forme :

$$\boxed{17\ bis} \qquad \zeta'' - i\frac{C}{A}\omega\zeta' + \left(\frac{-\mu}{A}\right)(1 + \theta_4 \sin n_3\,\omega t)\,\zeta = 0.$$

Le risque de résonance provoqué par la différence entre les moments d'inertie A et B est donc lui aussi rigoureusement nul si $\omega > \omega_c$.

2.5.7. *Remarques.*

Trois conclusions importantes paraissent pouvoir être tirées du présent chapitre.

a. Les risques de résonance liés à la fluctuation de C'_n et à la fluctuation du moment cinétique semblent nuls *si la vitesse de roulis* ω *est maintenue au-dessus de la valeur critique* $\omega_c \simeq \sqrt{\frac{-\mu}{A - C}}$.

Il est rappelé que ω_c correspond à la résonance fondamentale entre les mouvements de roulis et tangage du seul fait de la divergence des axes $\overrightarrow{Gz}$ et $\overrightarrow{GM}$.

Si ω est supérieur à ω_c, tout se passe comme si les équations [17] et [17 *bis*] étaient de la forme :

$$\boxed{18} \qquad \zeta'' - i\frac{C\omega}{A}\zeta' + \left(\frac{-\mu}{A}\right)(1 + q\theta)\,\zeta = 0.$$

équation où q est une constante petite devant l'unité.

Cette remarque justifie les deux premières hypothèses simplificatrices faites au paragraphe 1-3 *a*.

b. Par contre, si $\omega \leqslant \omega_c$, les imperfections de symétrie peuvent apporter au mobile empenné des risques de résonance provenant de trois causes différentes :

— divergence des axes $\vec{Gz}$ et $\vec{GM}$;

— défaut de symétrie de révolution de $\vec{C'_N}$ autour de $\vec{GM}$;

— différence entre les moments d'inertie A et B, et donc fluctuations du moment cinétique $\vec{G\sigma}$.

Analytiquement les résonances dues à la première de ces causes sont apportées par le deuxième membre de l'équation du mouvement en incidence. Les résonances dues aux deux autres causes sont apportées par le premier membre, l'équation sans second membre étant alors du type équation de Mathieu.

c. Par ailleurs, si *le mobile est symétrique*, C'_M peut encore du fait de la disposition des ailettes n'être pas de révolution. Ceci peut entraîner de nouveau des résonances du deuxième type si $\omega \leqslant \omega_c$.

2.6. Effondrement éventuel du couple stabilisant avec les très faibles obliquités.

2.6.1. *Position du problème.*

a. Les équations ou relations citées ou établies plus haut supposent entre autres, que le moment M des « forces de compression » est proportionnel à l'incidence :

$$M = \mu \ |\zeta + \zeta_m|.$$

Dans ces expressions, il est entendu que μ varie avec le nombre de Mach b et avec la masse spécifique de l'air $\rho = \frac{\Delta}{g}$, mais est indépendant de l'obliquité.

b. Les mesures effectuées en soufflerie confirment cette dernière hypothèse dans le domaine :

$$\delta^+ < \delta < \delta^{++} :$$

— δ^+ correspond aux incidences suffisamment faibles pour lesquelles la précision de la mesure de C'_M en soufflerie devient insuffisante (1° par exemple) ;

— δ^{++} est une incidence déjà importante (5 à 10° par exemple) pour laquelle la chute de C'_M commence a être observée.

c. Mais dans le cas des empennés au calibre supersonique et dans le domaine des incidences définies par :

$$0 < \delta < 1^\circ,$$

avec tout au plus :

$$\delta_{M_1} \backsim 2^\circ,$$

la quasi totalité de l'empennage sera dans le sillage du culot.

Cette observation avait fait *craindre* pour de tels projectiles une diminution importante du *cœfficient* μ, voire une instabilité du projectile, dans le domaine des petites incidences.

2.6.2. *Artifice capable de pallier cette instabilité éventuelle.*

a. C'est dans cet esprit que l'Ingénieur Principal LARROUMETS avait imaginé de donner à un projectile empenné au calibre animé d'une rotation lente une dissymétrie volontairement dosée de manière à maintenir sur le projectile en fin de nutation une légère incidence δ_a.

Cette obliquité résiduelle, suffisamment élevée pour être efficace (au moins 1°) était obtenue en créant volontairement sur le projectile une divergence importante entre l'axe de moment nul (ou l'axe de force latérale nulle) et l'axe longitudinal et principal d'inertie. Elle était obtenue par une troncature d'ogive ou par un balourd prédéterminé.

b. Un tel artifice avait l'inconvénient de faire tourner l'axe de force latérale nulle autour de l'A.I.P. avec une incidence de l'ordre de un degré ou plus.

L'altération induite par une telle obliquité est étudiée en troisième partie de cette note, elle est de la forme :

$$e_{\delta a} \backsim i \frac{\varkappa}{\omega} \delta_a X,$$

ce qui dans le cas d'un δ_a supérieur à un degré donnerait un *supplément inacceptable de dispersion angulaire au tir.*

Ainsi, dans le cas du projectile de référence, un δ_a de deux degrés conduirait à un supplément de dispersion angulaire supérieur à deux millièmes (en hauteur et en largeur).

2.6.3. *Observations plus récentes.*

a. Au cours de plusieurs tirs d'étude, l'essai des dissymétries prédéterminées n'a pas apporté d'amélioration significative de la précision.

b. L'expérience des tirs de précision effectués pendant plusieurs années, sur doubles panneaux constitués de :

— papier fin à 100 m ou 200 m,

— carton à 1 000 m, 1 200 m, 1 500 m ou 1 800 m,

a montré que, en air calme, le *diamètre apparent* de la dispersion au tir de projectiles, aussi symétriques que possible et dont la rotation était convenablement dosée, était sensiblement *indépendante de la portée.*

Or ces projectiles présentaient des premières obliquités maximales de l'ordre de 1 à 2 °, parfois plus de 3°, mais elles étaient toujours rapidement amorties au-dessous de 1°.

c. Plus récemment des tirs aux panneaux ont pu être dépouillés en dépit de très faibles obliquités naturelles ($\delta_{M_1} < 1°$) et comparés avec des tirs effectués le même jour avec le même projectile tiré au travers d'une perturbation artificielle de telle sorte que : $\delta_{M_1} \simeq 5°$.

Les longueurs d'onde de nutation dépouillées par ces deux tirs étaient *très voisines.*

2.6.4. *Remarque.*

Tout semble donc se passer comme si le moment M était une fonction linéaire de l'incidence.

La troisième hypothèse simplificatrice du paragraphe 1.3.1.*a* paraît ainsi suffisamment justifiée.

2.7. Nature et allure des mouvements autour du centre de gravité.

2.7.1. *Nutation initiale et nutation sur la trajectoire.*

a. La condition | 10 | étant satisfaite, les mouvements autour du centre de gravité, le long de *l'arc initial* de la trajectoire, sont principalement caractérisés par les *oscillations de nutation* qui d'après | 7 | présentent la période [1] :

| 19 |

$$T_N \simeq \pi \sqrt{\frac{A}{-\mu}} \left[1 - \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{\omega C}{A}\right)^2 - (\varkappa - h)^2}{\left(\frac{-\mu}{A}\right)} \right].$$

Cette période est égale à la *demi-période de tangage* T_Γ du mobile. Elle est aussi voisine de $\pi \sqrt{\frac{A}{-\mu}}$, c'est-à-dire de la demi-période de tangage du même mobile supposé dépourvu de roulis et d'amortissement. Soit ω_Γ la pulsation de tangage, on a :

$$T_\Gamma = \frac{2\pi}{\omega_\Gamma} = 2\,T_N \sim 2\pi \sqrt{\frac{A}{-\mu}}.$$

La longueur d'onde de nutation Λ_N est donc sensiblement liée aux caractéristiques mécaniques et aérodynamiques par la relation [2] :

| 20 |

$$\Lambda_N^2 = (VT_N)^2 \sim \frac{g}{\Delta} \frac{8\pi A}{a^3 C_N' |l_g|}.$$

b. La relation | 7 *ter* | montre aussi, que le plan de nutation ($Gz\ z_1$) tourne avec *la vitesse de précession* [3] :

$$\Phi' = \left(\frac{C}{A} - \lambda\right) \frac{\omega}{2} \simeq \frac{C}{2A}\,\omega.$$

Dans le cas des faibles vitesses de roulis la vitesse de précession est donc très faible : (un tour complet sur 600 m pour le projectile de référence).

c. L'amortissement de la nutation dépend entre autres des coefficients [4] :

NOTA

[1] Par définition, la période de nutation sépare 2 maximums d'incidence successifs. ζ_N est la somme de 2 vecteurs tournant l'un par rapport à l'autre à la vitesse $2\omega_\Gamma$. Par conséquent $T_N = \frac{\pi}{\omega_\Gamma}$.

[2] Dans le cas du projectile de référence T_N est très voisin de $\sqrt{\frac{-\mu}{A}}$ à mieux de 1/100 près (voir page 20) et $\Lambda_N = 25$ m.

[3] Dans le cas des projectiles étudiés Φ' mesuré aux panneaux est bien de l'ordre de $\frac{C}{2A}\,\omega$.

[4] f_k et f_j sont les coefficients de Magnus définis à la figure 4.

$$\lambda = \boxed{\frac{\rho}{8}\frac{a^3}{m}} f_k, \qquad \gamma = \boxed{\frac{\rho}{16}\frac{Va^4}{C}} f_j.$$

Dans le cas du projectile de référence, on a les ordres de grandeurs suivants :

$$\boxed{\frac{\rho\, a^3}{8\, m}} \sim 3.10^{-5}, \qquad \boxed{\frac{\rho}{16}\frac{Va^4}{C}} \simeq 1\, s^{-1}.$$

Mais les coefficients f_k et f_j n'ont encore pas fait l'objet de mesures directes. Par contre, des essais effectués en soufflerie ont déjà confirmé l'ordre de grandeur de f_k admis pour les projectiles classiques :

$$f_k \text{ (classique)} \simeq 5.$$

Pour les empennés au calibre f_k est vraisemblablement plus important. Toutefois *on a vérifié expérimentalement* que la nutation de projectiles analogues au projectile de référence (voir tableau I) était *effectivement amortie* même avec des ω de l'ordre de 50 t/s.

La relation $\boxed{11}$ permet alors d'écrire :

$$2\frac{A}{C}\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\,\frac{\varkappa + h + \frac{V'}{V} + \frac{2\, l'_g}{l_g}}{|\,2\gamma - (h - \varkappa - \Gamma)\,|} > 300 \text{ rds.}$$

Compte tenu des valeurs numériques qui caractérisent ce projectile, cette inégalité permet déjà d'écrire :

$$-40 < \gamma < +50, \qquad -40 < f_j < +50,$$

(ou encore $|f_k| < 25$ dans le cas où « les forces de viscosité » auraient leur métacentre à environ un calibre du centre de gravité).

Des essais complémentaires permettraient de dire s'il est possible de tirer ces projectiles avec des ω nettement supérieurs à 50 t/s, et de resserrer les limites encadrant γ.

d. Les perturbations de l'atmosphère peuvent faire apparaître des *nutations sur la trajectoire* (voir troisième partie). Le raisonnement, par rapport à un trièdre lié au vent, conduit aux mêmes équations que celles qui régissent la nutation initiale. Toutes ces nutations ont donc *la même allure.*

2.7.2. *Obliquité résiduelle* (*ou incidence résiduelle*).

Aux mouvements de nutation, c'est-à-dire à la solution ζ_λ se superpose un autre mouvement. Celui qui correspond à la solution particulière $\zeta_R = \zeta_P + \zeta_D$.

En raison des *imperfections de symétrie*, ζ_l et ζ_m, le mobile va « *frétiller* », tout le long de la trajectoire et *autour* de son *centre de gravité*, avec l'amplitude et le rythme de ζ_D.

Plus précisément, l'axe principal d'inertie $\overrightarrow{Gz}$ va tourner à la vitesse ω autour de l'A.I.P. en faisant avec lui l'angle δ_D, et l'A.I.P. étant presque couché sur la vitesse (à δ_P près).

Dans le cas de projectiles résistants au tir, fabriqués avec soin, et animés d'une vitesse convenable de roulis, l'amplitude du mouvement résiduel $2\,\delta_D$ reste faible. Mais dans les autres cas δ_D peut prendre des valeurs notables conduisant même à la « mise en vrille » si :

$$\omega \simeq \omega_c = \sqrt{\frac{-\mu}{A-C}}.$$

2.7.3. *Observations expérimentales.*

Pratiquement, avec des empennés de caractéristiques voisines de celles du projectile de référence :

— les obliquités naturelles souhaitables sont naturellement très faibles (premier maximum d'obliquité δ_{M_1} de l'ordre de un degré ou moins);

— l'observation de ces obliquités est d'ailleurs très délicate,

— la mesure de Λ_ν nécessite alors l'emploi d'une amplification artificielle de δ (panneau perturbateur...);

— l'amortissement des oscillations est rapide, par exemple :

$$\delta_{M_2} \simeq \frac{1}{3}\,\delta_{M_1} ;$$

— les tirs de dosage de la vitesse de roulis ont montré que le passage de la vitesse de roulis par la valeur critique ω_c provoquait effectivement la mise en vrille du projectile.

TROISIÈME PARTIE

LES ALTÉRATIONS DE LA TRAJECTOIRE INDUITES PAR LES MOUVEMENTS AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ

(Cas des tirs de plein fouet)

ALTÉRATIONS LONGITUDINALES ET TRANSVERSALES.

ALTÉRATIONS PROVOQUÉES PAR LA NUTATION INITIALE.

ALTÉRATIONS PROVOQUÉES PAR LES PERTURBATIONS ATMOSPHÉRIQUES.

ALTÉRATIONS PROVOQUÉES PAR LES IMPERFECTIONS DE SYMÉTRIE.

DOSAGE DE LA VITESSE DE ROULIS ET LIMITATION DES IMPERFECTIONS.

3.1. Définition des différentes altérations.

3.1.1. *Les altérations longitudinales et transversales.*

a. Au point G (t) de la *trajectoire effectivement suivie* par le mobile correspond le point G_1 (t) de la *trajectoire non altérée* (ou trajectoire d'incidence nulle) et le point G_0 (t) de la trajectoire des tables, uniquement altérée par la précession ζ_P provoquée par la courbure moyenne de la trajectoire (voir fig. 10).

Le vecteur altération $\overrightarrow{G_1G}$ est défini par ses composantes :

$$\overrightarrow{\delta x_0},\ \overrightarrow{\delta y_0},\ \overrightarrow{\delta z_0},$$

parallèles aux axes du trièdre ($Ox_0y_0z_0$) lié au sol, ou encore par δx_1, δy_1, δz_1, composantes parallèles aux axes du trièdre ($G\,x_1y_1z_1$) lié à la vitesse.

Dans le cas des tirs de plein fouet, avec de courtes durées de trajet τ et η sont petits, l'influence de *l'altération longitudinale* δx_0 sur l'altération du point de chute [1] est négligeable, et nous poserons :

$$\boxed{21} \qquad e = \delta y_0 + i\delta z_0 = \delta x_1 \cos\tau + i\delta y_1 \cos\eta \simeq \delta x_1 + i\delta y_1.$$

e mesure la projection de l'*altération transversale*, parallèlement à Ox_0, dans le plan complexe (Oy_0z_0).

b. Dans le cas des tirs en *atmosphère calme*, et *dans les conditions de référence* de vitesse initiale, de coefficient balistique et de densité de l'air, nous avons, d'après $\boxed{3}$:

$$(\delta x_1 + i\delta y_1)' = V(\delta\tau + i\eta\cos\tau) = V\int_0^t [\varkappa(\zeta + \zeta_l) + i\lambda\omega\zeta]dt.$$

Finalement, l'altération transversale en atmosphère calme sera mesurée par :

$$\boxed{22} \qquad \boxed{e = \int_0^t V\left\{\int_0^t [\varkappa(\zeta + \zeta_l) + i\lambda\omega\zeta]dt\right\} dt.}$$

3.1.2. *Les composantes de l'altération transversale* (*cas de l'atmosphère calme*).

Nous avons posé au chapitre 2.2. :

$$\zeta = \zeta_N + \zeta_P + \zeta_D.$$

Nous poserons de même :

$$\boxed{23} \qquad \boxed{e = e_N + e_P + e_D}$$

Et nous pourrons aussi écrire :

$$\boxed{e = X\,(d\alpha + id\beta)}$$

$d\alpha$ et $d\beta$ représentent les angles de « relèvement » et de « fouettement latéral [2].

Dans l'expression $\boxed{23}$:

— e_N représente la part de l'altération transversale due à la nutation;

— e_P représente la part de l'altération transversale due à la précession ζ_P;

[1] Par définition la cible soumise à un « *tir de plein fouet* » est assimilée à sa silhouette, à la portée X, dans un plan normal à la direction du tir.

[2] C'est-à-dire les angles dont il faut faire tourner la trajectoire, autour d'un point voisin de la bouche du tube de lancement pour amener le point de chute des tables M_0 en coïncidence avec le point d'impact M (voir fig. 10, page 563).

— e_D représente la part de l'altération transversale due aux dissymétries. Nous avons donc :

$$\boxed{\begin{aligned} e_N &= \int_0^t V\left[\int_0^t (\varkappa + i\lambda\omega)\zeta_N dt\right] dt; \\ e_P &= \int_0^t V\left[\int_0^t (\varkappa + i\lambda\omega)\zeta_P dt\right] dt; \\ e_D &= \int_0^t V\left\{\int_0^t [\varkappa(\zeta_D + \zeta_l) + i\lambda\omega\zeta_D]\, dt\right\} dt. \end{aligned}}$$

3.1.3. *Remarques.*

a. L'altération de précession e_P est sensiblement constante d'un coup à l'autre. Elle n'intervient donc pas dans la dispersion au tir, et elle peut être prédéterminée par la table de tir. Dans le cas des projectiles de référence e_P est d'ailleurs *très faible*, même en atmosphère calme sa valeur serait de l'ordre des erreurs de mesure.

b. La nutation initiale étant normalement rapidement amortie, nous pourrons écrire *l'altération des nutations* $e_\backslash$ sous une forme linéaire en fonction de la portée X :

$$e_N = X\Delta_N = X\int_0^t (\varkappa + i\lambda\omega)\,\zeta_N dt,$$

et nous poserons :

$$\Delta_N = d\alpha_N + id\beta_N.$$

c. Enfin, les perturbations atmosphériques provoquent aussi des altérations dont nous chercherons une évaluation.

3.2. Les altérations induites par la nutation. — Nutation initiale et nutation sur la trajectoire.

3.2.1. *Déviation de la trajectoire induite par la nutation initiale.*

L'équation [4] s'écrit sans second membre :

$$\boxed{24}\quad \zeta_N'' + \left[\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)\right]\zeta_N' + \left[\left(\frac{-\mu}{A}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)\right]\zeta_N = 0.$$

Nous supposons que les conditions de stabilité [10], [11], [14] sont réalisées. La nutation initiale n'intéresse alors qu'une *courte fraction de la trajectoire* au cours de laquelle les *paramètres évoluent lentement* et peuvent être remplacés par leur *valeur moyenne.*

En intégrant l'équation [24] et en multipliant par $\varkappa + i\lambda\omega$ il vient alors :

$$\Delta_N'' + \left[\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)\right]\Delta_N' + \left[\left(\frac{-\mu}{A}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)\right]\Delta_N = 0.$$

Mais après amortissement nous avons :

$$\Delta_N'' \sim 0, \quad \Delta_N' \sim 0,$$

et compte tenu des conditions initiales :

$$\Delta_0, \ \zeta_0, \ \zeta'_0,$$

il vient finalement :

[25]

$$\Delta_N = d\alpha_N + id\beta_N = \Delta_0 + (\varkappa + i\lambda\omega)\frac{\left[\varkappa + h + i\omega\left(\lambda - \frac{C}{A}\right)\right]\zeta_0 + \zeta'_0}{\left(\frac{-\mu}{A}\right) - i\frac{C}{A}\omega\gamma + \left(h - i\frac{C}{A}\omega\right)(\varkappa + i\lambda\omega)}$$

(voir fig. 10.)

Dans cette expression :

— Δ_0 représente la « déviation de la trajectoire à la bouche », plus précisément Δ_0 mesure la projection orthogonale d'un vecteur unitaire porté par la vitesse initiale V_o sur le plan complexe (Gx_1y_1) perpendiculaire à l'axe du tube à l'instant de la mise à feu [1];

— $\Delta_\lambda - \Delta_0$ représente la déviation de la trajectoire induite par les mouvements autour du centre de gravité pendant la nutation initiale, plus précisément Δ_λ mesure à l'instant t, et après amortissement de la nutation, la projection orthogonale d'un vecteur unitaire porté par la vitesse sur le plan complexe $(Gx_1y_1)_0$, perpendiculaire à la tangente à la trajectoire des tables (T_0) au point $G_0(t)$;

— ζ_0 *et* ζ'_0 représentent bien entendu la grandeur (et l'orientation par rapport au plan vertical),

— de l'incidence initiale,

— de la vitesse de tangage et de lacet,

à l'instant $t = 0$ correspondant au passage à la bouche.

3.2.2. *Généralisation.*

Dans le cadre des hypothèses classiques de la balistique française, et de

[1] La composante verticale du Δ_0 est donc égale à « l'angle de projection » diminué de l'angle de site.

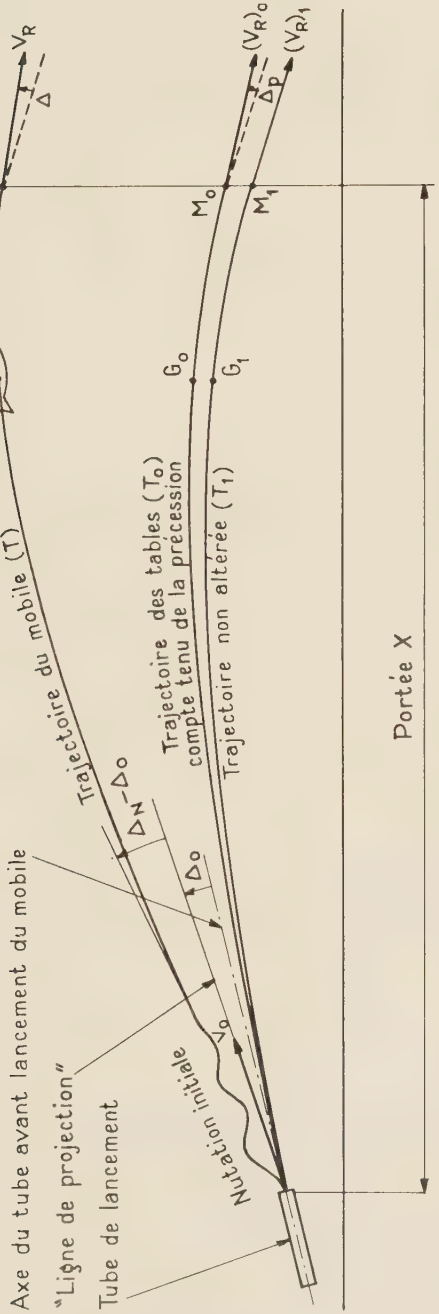


Fig. 10. — Les altérations de la trajectoire dans le cas d'un mobile empenné ne présentant pas d'imperfection de symétrie.

l'évolution lente [1] des paramètres de la relation [24], l'expression de Δ_N donnée par la *relation* [25] *est tout à fait générale.*

L'expression de Δ_N s'applique en particulier aussi bien à la nutation initiale des projectiles stabilisés principalement par roulis, qu'à celle des projectiles stabilisés principalement par empennages.

Cette expression s'applique aussi aux altérations provoquées par une nutation sur la trajectoire, (à un changement de coordonnées près).

3.2.3. *Simplifications dans le cas des mobiles à faible vitesse de roulis.*

Dans ce cas, nous pourrons considérer les termes en ω comme des termes du 2e ordre, il en sera de même du produit $\varkappa h$ qui est petit devant $(-\mu/A)$. Finalement, la relation [25] s'écrira :

[26] $$\Delta_N = d\alpha_N + id\beta_N \simeq \Delta_0 + \varkappa \frac{(\varkappa + h)\zeta_0 + \zeta_0'}{\left(-\frac{\mu}{A}\right)}.$$

Si on suppose de plus :

— que le mobile est projeté suivant une direction de tir confondue avec l'axe de la bouche de feu avant le départ du coup (déviation Δ_0 voisine de zéro),

— que la bouche du tube est un nœud pour la nutation, *ou plus précisément* que l'obliquité du mobile est encore très faible quand celui-ci quitte la *zone d'action des gaz de bouche,* la relation [26] se simplifie encore et s'écrit :

[27] $$\Delta_N = d\alpha_N + id\beta_N \simeq \varkappa \frac{\zeta_0'}{\left(\frac{-\mu}{A}\right)}$$

3.2.4. *Cas des nutations sur la trajectoire. Influence du vent.*

La relation [27] permet de calculer la partie principale de la *déviation de la nutation sur la trajectoire* due à un *échelon de vent transversal* W_z :

[28] $$d\beta_{W_z} \simeq \frac{W_z}{V} \varkappa \frac{(\varkappa + h)}{\left(\frac{-\mu}{A}\right)}.$$

On peut calculer de même la partie principale de l'altération de la trajectoire due à une *rafale* R soumettant le mobile pendant le temps ΔT au vent transversal W_z :

[29] $$e_{z_R} \simeq W_z \Delta T \varkappa \frac{\varkappa + h}{\frac{-\mu}{A}}.$$

[1] Cette expression n'est pas valable *à priori* lorsque des vitesses transoniques sont atteintes par le mobile au cours de la nutation.

Dans le cas des projectiles de référence le groupement $\left|\varkappa \frac{\varkappa + h}{-\mu/A}\right|$ est de l'ordre de 1 %, les effets de $d\beta_{W_z}$ et de e_{Z_r} sont donc très secondaires. On vérifiera [1] en particulier que l'action d'un vent transversal W_z aux portées usuelles du tir tendu (t de l'ordre de 1 à 2 secondes) est due principalement à la composante latérale de la traînée du projectile (et non aux mouvements du projectile autour du centre de gravité) on a en effet, en tenant compte de la traînée :

30 $$e_{W_z} \simeq W_z \left(t - \frac{X}{V_0} + \frac{X}{V_0} \varkappa \frac{\varkappa + h}{-\mu/A} \right).$$

L'altération transversale induite par le vent demeure donc sensiblement de l'ordre de celle qui serait subie par un mobile infiniment stable et de même traînée :

31 $$e_{W_z} \simeq W_z \left(t - \frac{X}{V_0} \right)^{(2)}.$$

Ces relations supposent bien entendu que le mobile ne traverse pas une succession de rafales au rythme de la période de nutation ou d'un de ses harmoniques, auquel cas les possibilités de résonance risquent de faire sortir le mobile de son domaine de linéarité ou de stabilité.

3.3. Altérations induites par les imperfections de symétrie.

3.3.1. *Évaluation de ces altérations le long d'un petit arc de la trajectoire*

Nous avons vu que l'altération transversale e_D induite par les imperfections ζ_l et ζ_m avait pour valeur :

32 $$e_D = \int_0^t V \left\{ \int_0^t [\varkappa (\zeta_D + \zeta_l) + i\lambda\omega\zeta_D] \, dt \right\} dt.$$

En supposant que les paramètres V, μ, $\varkappa$, ω ... entrant dans cette relation varient peu le long de l'arc étudié, et en donnant à ceux-ci leur valeur moyenne il viendra :

33 $$e_D \simeq i \left[\frac{\varkappa}{\omega} (\nu\zeta_{m_0} + \zeta_{l_0}) + i\lambda (\nu\zeta_{m_0}) \right] V \left[t + \frac{i}{\omega} (e^{i\omega t} - 1) \right].$$

Cette *altération* a donc une forme *cycloïdale*; la *trajectoire* décrite par le centre de gravité du mobile est donc voisine d'une *hélice*, dans la mesure où l'on peut négliger la courbure de la trajectoire des tables.

Mais le terme en t devient rapidement prépondérant devant le terme en $\frac{i}{\omega}$.

(1) Vérification qui a reçu elle aussi une confirmation expérimentale.

(2) Relation classique obtenue par projection orthogonale de la traînée sur un plan normal à la direction du tir : $e_{W_z} \simeq \int W_z V \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V}\right)$ [B2, page 189].

la partie principale de l'altération e_D est donc une *fonction sensiblement linéaire de la portée* définie par la déviation :

34

$$\Delta_D = \frac{1}{X} e_D = d\alpha_D + id\beta_D \simeq i\varkappa \left(\frac{\nu\zeta_{m_0} + \zeta_{l_0}}{\omega} \right)$$

Cette relation montre que la déviation de la trajectoire due à ζ_l et ζ_m :

— est proportionnelle à la quantité $(\nu\zeta_{m_0} + \zeta_{l_0})$;

— est inversement proportionnelle à ω, toutes choses égales par ailleurs;

— et son orientation est en quadrature avec l'orientation initiale des imperfections, ou plus précisément avec l'orientation à la bouche du vecteur d'affixe $(\nu\zeta_{m_0} + \zeta_{l_0})$.

Nota. — Le raisonnement qui vient d'être fait pour un arc de la trajectoire pourra être étendu à la *totalité d'une trajectoire tendue* si celle-ci est relativement courte. L'expression 34 donnera au moins *l'ordre de grandeur de la déviation.*

3.3.2. *Remarques. Supplément d'incidence initiale dû aux dissymétries.*

a. Les défauts ζ_l et ζ_m modifient la position de l'axe d'inertie $\overrightarrow{Gz}$ par rapport à l'axe des guidages du mobile dans le tube de lancement.

Étant donné l'imaginaire $\delta_g e^{i\varphi_g}$ qui repère, dans le plan complexe (Gxy) la position de l'axe des guidages par rapport à Gz, on pose :

$$\zeta_g = -\delta_g e^{i\left(\varphi_g + \varphi + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (1)$$

Des modifications des conditions initiales sont imposées par ζ_{g_0}, ζ_{m_0}, ζ_{l_0}. Si ces modifications sont notées $\delta(\ )_D$, il vient :

$$\delta(\zeta_0)_D = \zeta_{g_0}\ ;\ \delta(\zeta_{N_0})_D = \zeta_{g_0} - \zeta_{D_0} = \zeta_{g_0} - \nu\zeta_{m_0}\ ;$$

$$\delta(\zeta_0')_D = i\omega\zeta_{g_0}\ ;\ \delta(\zeta_{N_0}')_D = i\omega\zeta_{g_0} - \zeta_{D_0}' \simeq i\omega(\zeta_{g_0} - \nu\zeta_{m_0}).$$

b. Les modifications des conditions initiales entraînent, selon la relation 26 la modification $\delta(\Delta N)_D$ de l'altération de nutation ΔN :

$$\delta(\Delta N)_D = \varkappa \frac{\varkappa + h + i\omega}{-\mu I A} (\zeta_{g_0} - \nu\zeta_{m_0}).$$

c. En définitive l'altération globale Δ_{DG} provoquée par les défauts ζ_{g_0}, ζ_{l_0}, ζ_{m_0} a pour valeur :

$$\Delta_{DG} = \delta(\Delta N)_D + \Delta_D,$$

(1) ζ_g repère la position de l'axe des guidages par rapport à (Gx_1y_1z).

soit :

$$\boxed{35} \qquad \Delta_{D_G} = \varkappa \left(\frac{\varkappa + h + i\omega}{(-\mu/A)} \zeta_{g_0} + \nu \left[\frac{i}{\omega} - \frac{\varkappa + h + i\omega}{(-\mu/A)} \right] \zeta_{m_0} - \frac{i}{\omega} \zeta_l \right).$$

d. Ainsi, par exemple, dans le cas des projectiles extérieurement symétriques, mais présentant une excentricité E du centre de gravité, on a :

$$\zeta_{m_0} = \frac{E}{-l_g} e^{i\varphi_m} ; \ \zeta_l = 0; \ \zeta_{g_0} = \zeta_{m_0},$$

et par suite :

$$\boxed{35\ bis} \qquad \Delta_{D_G} = \varkappa \left(\left[\frac{\varkappa + h}{(-\mu/A)} \right] + i \left[\frac{\omega}{(-\mu/A)} + \nu \left[\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{(-\mu/A)} \right] \right] \right) \zeta_{m_0} .$$

L'orientation du *supplément de déviation initiale* dû aux imperfections de symétrie n'est donc *pas exactement* en quadrature avec l'orientation initiale de ces défauts. Ceci a été constaté expérimentalement lors de tirs de projectiles présentant des balourds importants et dont l'orientation avait été diamétralement alternée d'un coup à l'autre. (Les projectiles expérimentés étaient voisins du projectile de référence, le décalage observé entre l'orientation du défaut et celle de la déviation provoquée en moyenne par un balourd statique était de l'ordre de 70°.)

On voit toutefois que l'altération Δ_{D_G} demeure de l'ordre de Δ_D.

3.3.3. *Cas des mobiles dépourvus de roulis.*

En appliquant la relation 32 à ce cas particulier, on trouve :

$$\boxed{36} \qquad e_{D_{(\omega=0)}} \simeq \frac{\varkappa}{2} V (\zeta_l - \zeta_m) t^2 .$$

La forme parabolique de cette relation explique *la nécessité de la vitesse lente de roulis* pour avoir une précision acceptable [1].

Pratiquement, la comparaison des relations 34 et 36 montre que le rapport des altérations :

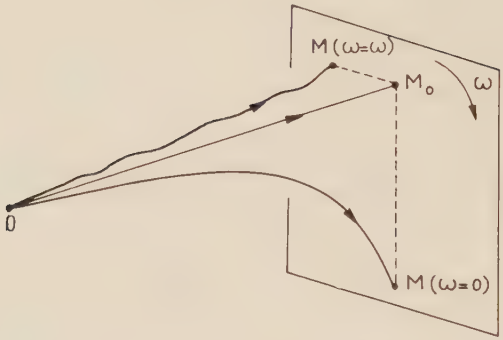
$$\frac{e_{D_{(\omega=0)}}}{e_{D_{(\omega \neq 0)}}}$$

est de l'ordre de $\frac{\omega t}{3}$, soit par exemple *de l'ordre de 100* si $\frac{\omega}{2\pi} \simeq 20$ tr/s et $T \sim 2$ s.

La comparaison,

- de la trajectoire non altérée par des imperfections de symétrie, (point de chute M_0),

[1] Cette nécessité a fait l'objet d'une vérification expérimentale avec les projectiles du type de référence.



— avec la trajectoire du même mobile présentant les imperfections ζ_t et ζ_m et soit animé de la vitesse de rotation ω (point M [$\omega = \omega$]), soit dépourvu de rotation (point M [$\omega = 0$]), est précisée par la figure ci-dessus : d'où *l'intérêt de la rotation lente* antérieurement signalé.

3.4. Dosage de la vitesse de roulis.

3.4.1. *Choix des vitesses de roulis.*

a. Les formules 32 et 35 montrent l'intérêt des « fortes » vitesses de roulis, et bien entendu aussi le danger des vitesses voisines de la valeur critique ω_c. Ceci gagne a être précisé en prenant pour exemple le projectile de référence où ω_c est de l'ordre de 100 rd/s (cas des empennés au calibre expérimentés).

On peut alors dresser le tableau suivant [1] :

b. Il y a donc intérêt à maintenir la vitesse ω au-dessus de la vitesse critique ω_c, en cherchant par exemple à satisfaire aux inégalités suivantes [2] :

37

$$1{,}3\,\frac{\omega_c}{2\pi} < 1{,}5\left(\frac{V}{2\lambda_N}\right) < \frac{\omega}{2\pi} \leq \frac{\omega_M}{2\pi}\,.$$

La valeur ω_M borne supérieurement le domaine d'utilisation des empennés à rotation lente. C'est la plus faible valeur correspondant à l'apparition d'un ou plusieurs des effets suivants :

— déstabilisation par effet Magnus;

[1] Rappelons que :

$$\nu = \frac{1}{(\omega/\omega_c)^2 - 1}.$$

[2] On a : $\lambda_n \simeq \pi\sqrt{\dfrac{A}{-\mu}}\,V$ et « le pas critique de roulis » a pour valeur :

$$\lambda_{CR} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{A-C}{-\mu}}\,V \simeq 1{,}9\lambda_N.$$

ω_c rd/s.	← $\omega_c \simeq 100$ →									
ω rd/s.	10	25	50	75	90	100	110	125	150	200
$\frac{\omega}{\omega_c}$	1/10	1/4	1/2	3/4	9/10	1	11/10	5/4	3/2	2
$\frac{1}{\omega}$	1/10	1/25	1/50	1/75	1/90	1/100	1/110	1/125	1/150	1/200
ν	$-\frac{100}{99}$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{7}$	-5	$-\infty$ $+\infty$	$+5$	$+\frac{16}{9}$	$+\frac{4}{5}$	$+\frac{1}{3}$
ν/ω	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{38}$	$-\frac{1}{29}$	$-\frac{1}{18}$	$-\infty$ $+\infty$	$+\frac{1}{22}$	$+\frac{1}{70}$	$+\frac{1}{190}$	$+\frac{1}{600}$
Résultats	*a. Fortes valeurs* de $\frac{1}{\omega}$, $\frac{\nu}{\omega}$ et e_D				*b. Valeurs dangereuses proches de la résonance*			*c. Faibles valeurs* de $\frac{1}{\omega}$, $\frac{\nu}{\omega}$ et e_D		

— diminution de l'effet terminal du projectile sur la cible (cas des projectiles à charge creuse par exemple);

— apparition de forces centrifuges suffisantes pour perturber le parcours dans l'âme et le largage du mobile hors du tube de lancement.

3.4.2. *Mise en roulis et entretien de la vitesse de roulis.*

a. La formule 32 et l'expérience montrent que la *vitesse de* roulis doit déjà être *communiquée* au mobile préférentiellement dès la sortie du tube, si *la valeur de* ω_c *est relativement faible* (comme c'est le cas avec le projectile de référence).

Une mise en roulis sur la trajectoire en partant de $\omega_0 \sim 0$ pour atteindre des $\omega > \omega_c$ sont à éviter [en raison des risques de mise en vrille au passage par la valeur ω_c] [1].

b. L'entretien du roulis est nécessaire dans le cas du projectile de référence, sinon ω risque de passer au cours du vol par des valeurs voisines de ω_c. L'expérience a confirmé les dangers de la mise en vrille qui peut en résulter. L'entretien peut être obtenu très simplement par le braquage des ailettes.

(1) Des tirs d'étude ont confirmé ces indications.

Dans le cas du tir à grande vitesse initiale de mobiles affectés d'une traînée importante, l'entretien de la vitesse de roulis peut être *inutile* car ω_c *décroît alors encore plus vite que* ω.

c. Le choix de ω *inférieur à* ω_c est peut être opportun avec des *mobiles très stables* présentant des périodes de nutation très courtes, surtout s'ils sont sensibles à l'effet MAGNUS (cas *des empennés déployants* par exemple).

3.4.3. *Exemple de mise en roulis.*

a. Le diagramme de la figure 11 représente la mise en roulis de plusieurs *projectiles empennés* à faible traînée, effectivement expérimentés, et voisins du projectile de référence :

— *le projectile* (A) est tiré à $V_0 = 800$ m/s avec $\omega_{c_0} \simeq 150$ rd/s, ses empennages comportent un *braquage* d'ailettes (voir tableau I de valeurs numériques);

— *le projectile* (B) est tiré à $V_0 = 1\,000$ m/s avec $\omega_{c_0} \simeq 150$ rd/s, ses empennages comportent un braquage d'aillettes;

— *le projectile* (C) est identique au projectile (A) mais il est tiré dans un tube lisse;

— *le projectile* (D) est analogue au projectile (A) mais il ne comporte pas de braquage d'ailettes et il est tiré avec $\omega_{c_0} \simeq 300$ rd/s;

— *le projectile* (E) est tiré à 650 m/s avec un *braquage double* de celui du projectile (A) et avec $\omega_{c_0} \simeq 120$ rd/s.

b. On voit que le diagramme des ω comporte un *domaine utile* limité par la *zone des vitesses de roulis trop fortes* (ω_M restant fixé à 200 rd/s) et par la *zone des vitesses* inférieures à ω_c qui ne donnent qu'une faible compensation des altérations de symétrie.

Les *courbes de roulis* tendent vers des droites, (dans le plan de coordonnées (V_R, ω), qui correspondent au « *pas limite de roulis dans l'air* » déterminé par la valeur du braquage des ailettes.

c. Des mesures directes de ω ont été effectuées sur les projectiles (A), (B), (D), (E) et des projectiles analogues entre $V_0 = 1\,150$ m/s et $V_R = 500$ m/s, de $X = 200$ mètres jusqu'à $X = 2\,300$ mètres. La courbe (C) est une courbe déduite, de même que la courbe des braquages en pointillé où le projectile (B) est supposé être tiré avec des V_0, des ω ou des braquages différents.

L'expérience a montré que le cas des projectiles (C) et (D) dont la vitesse de roulis passait par la valeur $\omega = \omega_c$, en cours de trajectoire, étaient à éviter. Les projectiles présentaient alors des mises en vrille sur les trajectoires conduisant à des accroissements très importants de la dispersion du tir.

Nota. — Les *courbes de roulis* de la figure 11 présentent la propriété géométrique suivante, qui a été soulignée par M^lle^ LOVITON, Ingénieur civil à la Direction Technique des Armements Terrestres : la tangente à la courbe de roulis est parallèle à l'axe des abscisses au point d'intersection de la courbe de roulis avec son asymptote, tout au moins en première approximation, c'est-à-dire en supposant

$$\omega_{(\Gamma=0)} \simeq K V_R.$$

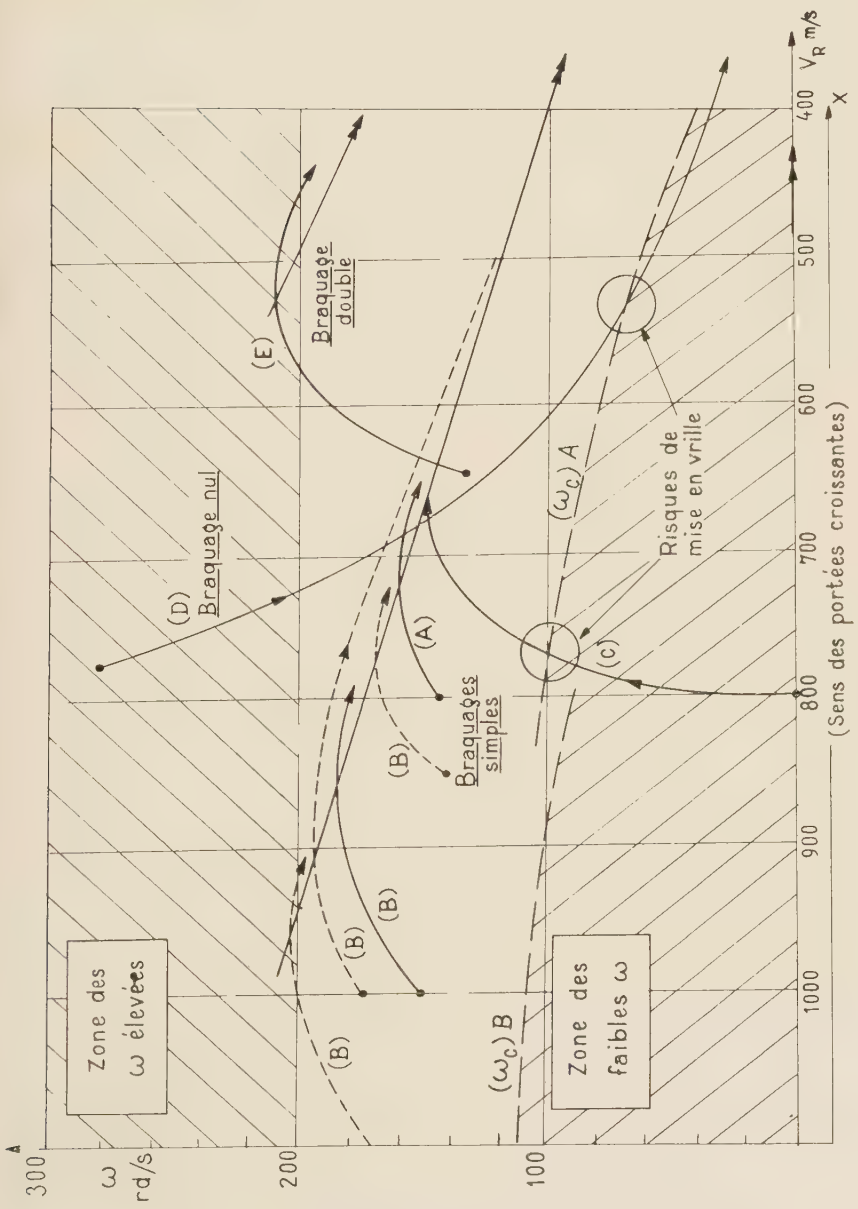


Fig. 11. — Mise en roulis de projectiles voisins du projectile de référence

QUATRIÈME PARTIE

DISPERSION DES ALTÉRATIONS, RÉPERCUSSIONS SUR LA PRÉCISION AU TIR ET SUR LA PROBABILITÉ D'ATTEINTE

Cas des tirs de plein fouet

REMARQUES PRÉLIMINAIRES, OBJET DE LA 4e PARTIE

DÉFINITIONS, ÉLÉMENTS DE LA DISPERSION DU TIR

CONDITIONS PRÉALABLES DE LA PRÉCISION AU TIR

LIMITATION DES EFFETS DE LA NUTATION INITIALE

EFFET DE LA PRÉCISION AU TIR SUR LA PROBABILITÉ D'ATTEINTE, CRITÈRES DE PRÉCISION

NOTA. — La 4e partie est donc consacrée au *caractère aléatoire des altérations* et à leurs effets sur l'efficacité des tirs tendus.

4.1. Remarques préliminaires. Objet de la quatrième partie.

4.1.1. Le problème balistique de la *recherche de la précision au tir*, c'est-à-dire d'une faible dispersion des points de chute, a essentiellement pour but l'amélioration de la *probabilité d'atteindre la cible.*

4.1.2. L'analyse de la mécanique du vol développée aux chapitres précédents précise l'altération induite, pour une trajectoire donnée, par le mouvement en incidence.

D'un coup à l'autre, cette altération se présente de manière aléatoire et compromet la précision intrinsèque du tir. Cette altération constitue même le plus souvent la source principale de la dispersion intrinsèque du tir, telle qu'on la mesure au polygone.

Mais la précision intrinsèque du tir n'est qu'un des éléments parmi d'autres de la probabilité d'atteinte. Il convient donc d'examiner les différents éléments de la probabilité d'atteinte et la combinaison de leurs effets.

4.1.3. D'autre part, si certaines conditions préalables ne sont pas satisfaites, la précision des mobiles empennés demeure inacceptable. On montrera que, dans le cas contraire, celle-ci est considérablement améliorée et que l'effet de la nutation initiale sur la dispersion résiduelle est alors prédominant.

4.1.4. La quatrième partie s'achève par une évaluation de l'effet de la précision sur la probabilité d'atteinte dans quelques cas concrets, et les résultats de cette évaluation conduisent à proposer des critères de précision.

4.2. Définitions. Éléments de la dispersion du tir.

4.2.1. *Précision. Justesse. Probabilité d'atteinte.*

a. Suivant les définitions balistiques usuelles :

— *le tir précis* est un tir groupé dont les points de chute sont peu dispersés;
— *le tir réglé* est un tir dont le point moyen correspond au point à atteindre;
— *le tir juste* est un tir précis et réglé.

b. L'efficacité du tir, et plus précisément la *probabilité d'atteinte*, est fonction de la justesse du tir, c'est-à-dire :

— des écarts dus à la dispersion du tir;
— des écarts dus à l'imperfection de la préparation ou du réglage du tir;
— des dimensions du but par rapport à ces écarts.

4.2.2. *Points de chute. Erreurs. Écarts. Altérations. Système.*

On a vu au chapitre 3.1 que la cible soumise à un tir de plein fouet a été assimilée à sa silhouette, à la portée X, dans un plan normal à la direction du tir. Nous entendons par *point de chute* le point où la trajectoire perce ce plan.

De même, dans les paragraphes suivants, les erreurs ou altérations correspondront à des *écarts* (en hauteur et largeur) mesurés dans ce plan.

Enfin le terme *système* utilisé ci-après désigne l'ensemble constitué par le mobile empenné, le matériel de lancement et ses servants.

4.2.3. *Dispersion au cours du tir. Dispersion d'un tir à l'autre. Dispersion du tir et dispersion globale.*

a. Dans le cas des tirs très brefs d'un ou quelques coups, qui caractérisent bien des tirs tendus, il importe de distinguer :

— *la dispersion* (*des coups*) *au cours du tir* affectant chacun des points de chute d'un même tir d'un écart par rapport au point moyen du tir;

— *la dispersion* (*des points moyens*) *d'un tir à l'autre* affectant chacun des points moyens de plusieurs tirs successifs d'un écart par rapport à leur moyenne générale;

— « *l'écart systématique* » entre cette moyenne générale et le point de chute théorique ou « point de chute des tables ».

b. La dispersion au cours du tir correspond à un *défaut de précision du tir* (et à un défaut de précision du système).

La dispersion d'un tir à l'autre correspond à *un défaut de fidélité du système.*

« *L'écart systématique* » peut provenir d'un défaut de conception, de fabrication ou d'un mauvais réglage initial de l'arme. En fait si le système a été convenablement étudié, fabriqué et initialement réglé, si la population des tirs est suffisamment importante et suffisamment variée, « *l'écart systématique* » *est négligeable* devant la dispersion d'un tir à l'autre. Celle-ci correspond alors pour chaque tir isolé à un *défaut de réglage* au sens balistique (c'est-à-dire à un défaut de justesse au sens usuel donné à ce terme en métrologie).

Nota. — Les paragraphes suivants ne tiennent pas compte de « l'écart systématique ».

c. La dispersion au cours du tir, la dispersion d'un tir à l'autre (et l'écart systématique) combinent leurs effets pour donner *la dispersion du tir* (proprement dite) qui affecte chaque point de chute *par rapport au point de chute des tables.*

L'effet de la dispersion du tir se combine aux effets des *imperfections de préparation ou de réglage du tir* pour aboutir à la *dispersion globale* qui affecte chaque point de chute *par rapport au point visé.*

4.2.4. *Éléments de la dispersion au cours du tir et de la dispersion d'un tir à l'autre.*

a. La dispersion au cours du tir provient principalement :

— des variations, par rapport à leur valeur moyenne au cours du tir, des altérations $X\,\Delta_N$ et $X\,\Delta_D$, provoquées par le mouvement en incidence du fait de la nutation initiale et des imperfections de symétrie, et auxquels il correspond les écarts-types σ_N et σ_D;

— des écarts par rapport à leur valeur moyenne au cours du tir de la vitesse initiale, du coefficient balistique [1] et du vent transversal et auxquels il correspond les altérations *élémentaires* d'écart-type σ_{V_0}, σ_c, σ_W.

b. La dispersion d'un tir à l'autre provient principalement :

— du défaut de fidélité de l'optique par rapport au matériel de lancement et auquel il correspond l'écart-type σ_F;

— des écarts par rapport aux valeurs *tabulaires*, corrigées ou non, des valeurs moyennes au cours du tir de la vitesse initiale, du coefficient balistique, du vent transversal, et auxquels il correspond les écarts-types $\sigma_{\overline{V_0}}$, $\sigma_{\overline{c}}$, $\sigma_{\overline{W}}$.

4.2.5. *Facteurs des erreurs de préparation et de réglage du tir.*

a. Les imperfections de préparation du tir proviennent des erreurs commises pour apprécier et afficher les éléments du but, en particulier la portée et les corrections éventuelles de vitesse du but, vent transversal...

Le choix du point visé et le soin apporté à la visée sont des éléments particulièrement importants de la préparation du tir, et *l'erreur de pointage* contribue donc aussi à l'imperfection de cette préparation.

b. Les imperfections de réglage du tir sont de même nature mais elles sont liées aussi à la qualité de l'observation des coups.

[1] Il s'agit du coefficient balistique adapté qui provoquerait, dans l'atmosphère de référence, la retardation effectivement observée au tir.

Ces imperfections sont citées pour mémoire car leur analyse sortirait du cadre de cette étude.

4.2.6. *Combinaison des éléments de la dispersion globale* (voir Tableau II).

a. Si.

— σ_G représente l'écart-type de la dispersion globale,

— σ_A représente l'écart-type de la dispersion au cours du tir,

— σ_T représente l'écart-type de la dispersion d'un tir à l'autre,

— σ_P représente l'écart-type de l'erreur de préparation du tir,

— σ_R représente l'écart-type de l'erreur de réglage du tir, (voir nota ci-après)

ces différentes sources d'écart étant sensiblement indépendantes, la valeur de σ_G est donnée par :

38 $\quad \sigma^2_{G_1} = \sigma^2_A + \sigma^2_T + \sigma^2_P$, au premier coup;

39 $\quad \sigma^2_{G_2} = 2\sigma^2_A + \sigma^2_R$, au deuxième coup, et aux coups suivants.

b. Les éléments, cités plus haut, de la dispersion au cours du tir et de la dispersion d'un tir à l'autre sont eux aussi indépendants et on peut écrire :

40 $$\sigma^2_A \backsimeq \sigma^2_N + \sigma^2_D + \sigma^2_{V_0} + \sigma^2_C + \sigma^2_W;$$

41 $$\sigma^2_T \backsimeq \sigma^2_F + \sigma^2_{V_0} + \sigma^2_C + \sigma^2_W.$$

Il faut remarquer qu'aux courtes durées de trajet σ_{V_0} et σ_C sont généralement négligeables devant σ_N et σ_D. Si σ_{pol} est l'écart-type de la *dispersion intrinsèque* des coups au cours du tir, telle qu'on la mesure en air calme *au polygone*, on a sensiblement :

42 $$\sigma^2_{pol} \backsimeq \sigma^2_N + \sigma^2_D + \sigma^2_{V_0} + \sigma^2_C \backsimeq \sigma^2_N + \sigma^2_D.$$

c. Finalement, la dispersion globale est caractérisée au premier coup et aux coups suivants par l'écart-type.

43 $$\sigma^2_{G_1} \backsimeq \sigma^2_P + \sigma^2_F + \sigma^2_{V_0} + \sigma^2_C + \sigma^2_W + \sigma^2_{pol},$$

soit sensiblement

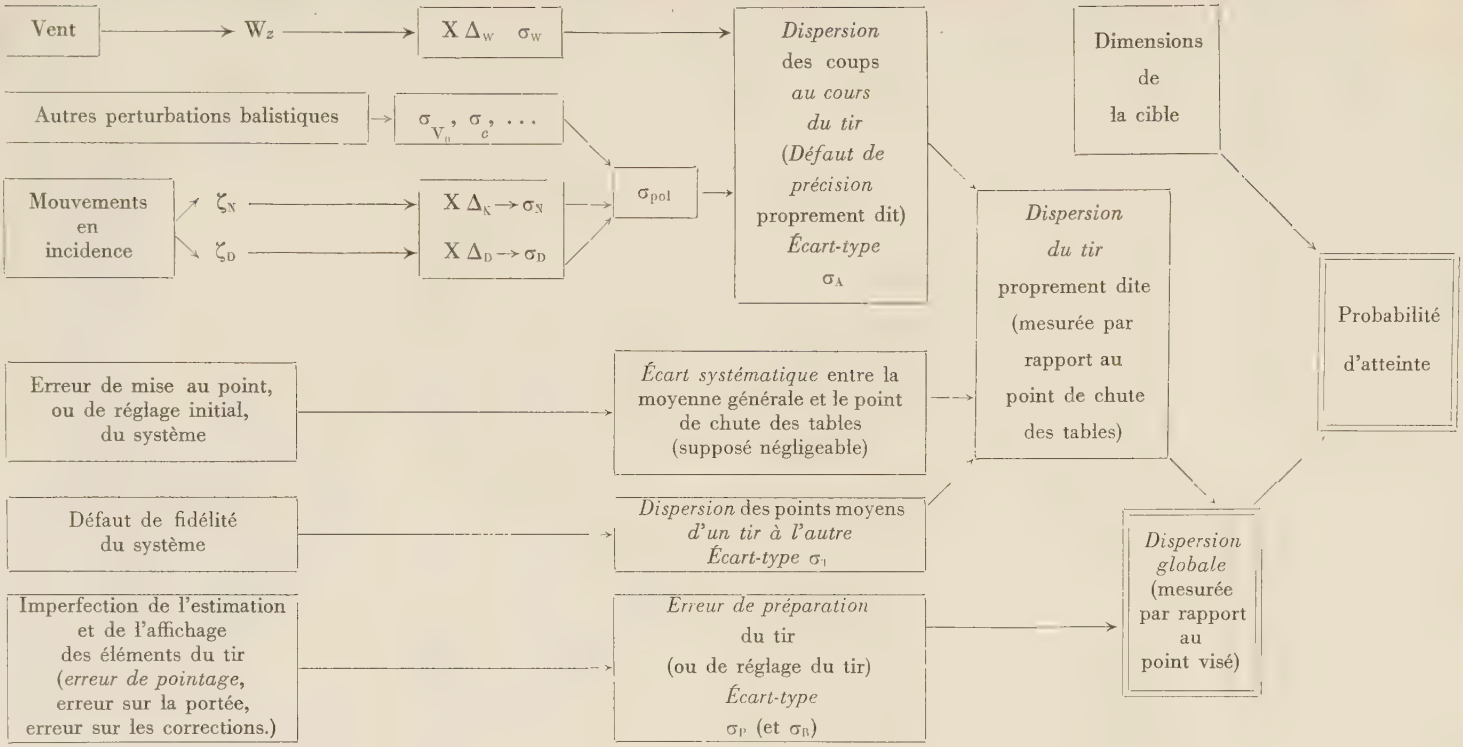
44 $$\sigma^2_{G_1} \backsimeq \sigma^2_P + \sigma^2_F + \sigma^2_W + \sigma^2_{pol},$$

et par l'écart-type :

45 $$\sigma^2_{G_2} \backsimeq \sigma^2_R + 2\sigma^2_{pol}.$$

NOTA. — L' « erreur de réglage » commise au 2e... ou ne constitue en fait elle aussi une « erreur de préparation», préparation dont l'observation des coups précédents constitue l'élément essentiel.

TABLEAU II. — *Combinaison des éléments de la dispersion du tir et de la probabilité d'atteinte*



NOTA. — σ_{pol}, *écart-type de la dispersion intrinsèque* au cours du tir, correspond à la dispersion telle qu'elle est *mesurée* en *atmosphère calme* au *polygone* avec des *pointages soignés*.

4.3. Conditions préalables de la précision au tir.

4.3.1. *Conditions préalables de stabilité.*

Il faut d'abord que la stabilité du mobile soit assurée, sans cela il ne serait être question de précision.

Les conditions de stabilité du mouvement autour du centre de gravité (périodicité et amortissement) ont été précisées en deuxième partie :

— périodicité assurée par la valeur négative de μ (condition de marge statique des aérodynamiciens);

— vitesse de roulis maintenue hors des *zones critiques* tout au long de la trajectoire;

— vitesse de roulis néanmoins insuffisante pour provoquer l'amplification des oscillations par effet Magnus.

On a vu que dans le cas du projectile de référence la condition de roulis était la suivante :

$$1{,}3\omega_c < \omega < 300 \text{ rd/s}$$

4.3.2. *Limitations de l'effet des imperfections de symétrie.*

a. Les obliquités résiduelles après amortissement de la nutation initiale doivent être réduites de telle sorte que la dispersion des points de chute provoquée par les imperfections de symétrie demeure d'un *ordre nettement inférieur à celui de la dispersion du tir*, mesurée au polygone.

b. Pour être assuré de ce résultat il faut être certain de la *résistance au tir* du projectile : c'est-à-dire que la structure du mobile demeure dans le domaine élastique en dépit

— des contraintes du lancement (provoquées par exemple par le coup de canon ou par l'impulsion du propulseur),

— des contraintes aérodynamiques subies sur la trajectoire.

Il est d'ailleurs *essentiel que ce point soit vérifié expérimentalement* par des tirs avec récupération des mobiles selon un procédé approprié.

c. Les relations 34 et 35 vues au chapitre 3.3 montrent que les imperfections δ_l et δ_m de l'ordre de 3 milliradians au maximum (correspondant à des écarts-types σ_l et σ_m de l'ordre de 2 milliradians) conduisent dans le cas du mobile de référence à une dispersion élémentaire du tir caractérisée par :

$$\sigma_D \leqslant 2\frac{\varkappa}{\omega} \cdot 2.10^{-3}X \backsimeq 0{,}07.10^{-3}X.$$

La dispersion des projectiles expérimentés étant caractérisée par un écart-type en hauteur et en direction de l'ordre de 0,15 à 0,50 milliradian, l'effet de σ_D est alors suffisamment limité.

d. Il est à remarquer d'autre part que les conditions :

$$\sigma_l \leqslant 3 \text{ milliradians}, \qquad \sigma_m \leqslant 3 \text{ milliradians}$$

sont obtenues sans difficultés particulières avec des projectiles correctement usinés sans précaution spéciale.

En effet cette condition suppose par exemple pour le projectile de référence :

— un centrage de l'empennage à 0,3 mm près à 100 mm en arrière du centre de gravité;

— une excentricité du centre de gravité, par rapport au profil extérieur, de 0,15 mm ou moins;

— une inclinaison maximale de l'axe longitudinal et principal d'inertie sur le profil extérieur se traduisant par une excentricité de l'ordre de 0,3 mm ou moins de la masse élémentaire d'une tranche du projectile située à 100 mm du centre de gravité.

e. En conclusion de ce paragraphe, si la loi de roulis est judicieuse et si la résistance au tir est assurée, les tolérances de fabrication devraient limiter sans difficulté les effets des imperfections de symétrie à un niveau négligeable.

4.3.3. *Limitation de l'effet du vent transversal.*

a. La valeur moyenne $\overline{W}_z$ du vent transversal au cours d'un tir de plusieurs coups est affectée d'une dispersion d'écart-type $\sigma_{(\overline{W}_z)}$.

La valeur W_z du vent transversal auquel est soumis chaque coup d'un même tir, est affecté par rapport à $\overline{W}_z$ d'une dispersion d'écart-type σ_{W_z}.

Une statistique antérieure nous a montré que l'intensité des vents dans le centre de la France était affectée d'une loi de distribution sensiblement normale et d'écart-type voisin de 4,5 m/s (mesure en terrain dégagé à plusieurs mètres au-dessus du sol). Pour une distribution uniforme des directions de tir par rapport au vent, l'écart-type du vent transversal est alors de 3 m/s.

On peut donc penser que :

$$\sigma_{(\overline{w}_z)} \simeq 3 \text{ m/s}, \quad \sigma_{(w_z)} \simeq 0{,}5 \text{ m/s} \quad (1)$$

caractérisent sensiblement dans nos régions l'ordre de grandeur du vent balistique moyen et de ses variations au cours du tir.

b. L'écart-type du vent transversal étant de l'ordre de 3 m/s, l'altération provoquée par le vent transversal sera caractérisée par un écart-type de l'ordre :

$$\sigma_{\overline{W}} \simeq 3\left(T - \frac{X}{V_0}\right), \quad \left(\text{application de la relation } \boxed{31}\right).$$

La probabilité d'avoir un premier coup en direction de la cible est d'une importance capitale pour l'observation et la poursuite du tir, et cette probabilité ne peut être élevée si le rapport entre $\sigma_{\overline{W}}$ et la largeur de la cible L est trop grand.

Un rapport $\sigma_{\overline{W}}/L$ de l'ordre de 1/2 donne en loi normale une probabilité

(1) L'expérience montre que pour les munitions à tir tendu actuelles stabilisées par roulis, comme pour les projectiles empennés voisins du mobile de référence, les dispersions en hauteur et direction sont du même ordre. Ce qui fait *supposer* que σ_W n'est pas d'un ordre supérieur à σ_{V_0}. Ainsi, aux portées usuelles et avec un $\left(T - \frac{X}{V_0}\right)$ de l'ordre de 0,2 *s*. σ_W serait au plus de l'ordre de 0,10 m.

au plus égale à 2/3 d'être en direction de la cible, ce qui conduit à recommander le critère :

$$T - \frac{X}{V_0} \leq \frac{L}{6} s,$$

soit dans le cas d'une cible de l'ordre de 2 mètres de côté.

46

$$\boxed{T - \frac{X}{V_0} < 0{,}3 \text{ s}}.$$

4.4. Limitation des effets de la nutation initiale.

4.4.1. *Nutation intiale et dispersion intrinsèque.*

Si les conditions préalables de la précision présentées au chapitre 4.2. sont toutes satisfaites, la *dispersion intrinsèque des coups* (telle qu'on la mesure *au cours des tirs effectués au polygone* avec des pointages très soignés) conserve néanmoins une *valeur résiduelle* plus ou moins importante.

Cette dispersion intrinsèque caractérisée par l'écart-type σ_{pol} admet alors pour *partie principale* la dispersion provoquée par la variation d'un coup à l'autre de la *déviation* Δ_γ infligée à la trajectoire par la percussion et la nutation initiale :

$$\sigma^2_{pol} = \sigma^2_{V_0} + \sigma^2_C + \sigma^2_{W_{(pol)}} + \sigma^2_N + \sigma^2_D \simeq \sigma^2_N,$$

avec :

$$\sigma_N = X\sigma_{(\Delta_\gamma)},$$

et, d'après la relation 25

47

$$\Delta_N \simeq \Delta_0 + \varkappa \frac{\zeta_0}{(-\mu/A)}.$$

NOTA. — Les paragraphes suivants s'appliquent plus particulièrement au cas où le matériel de lancement est constitué par un *tube*, et plus précisément par un *canon* dont les gaz poussent le projectile puis le dépassent ou l'accompagnent au cours des premiers mètres de la trajectoire. Les artilleurs donnent à un tel tube le nom de « *bouche à feu* » et l'extrêmité du tube appelée « *volée* » est délimitée par la « *tranche de bouche* ».

4.4.2. *Influence de la dispersion des lignes de projections* σ_{Δ_0}.

Il semble que la *part de* Δ_0 dans la dispersion du tir soit *faible*, c'est-à-dire que σ_{Δ_0} soit petit devant σ_{Δ_γ}, et que l'influence de la vitesse de tangage, ou de lacet, ζ'_0 soit *prépondérante*.

a. Les mesures de vibration de volée sont délicates. La précision des mesures définissant l'axe de la volée lors du passage du projectile à la bouche est de l'ordre de la précision du tir [B9].

Cependant, il a été observé, lors des tirs aux panneaux effectués avec les projectiles empennés voisins du projectile de référence, que la dispersion des déviations initiales d'un coup à l'autre était directement liée à la valeur et à l'orientation des premières obliquités maximales de chaque coup.

b. D'autre part le tir des boulets courts à bout plat, présentant de faibles forces latérales, conduit à une dispersion du tir très faible par rapport à celle des projectiles voisins du projectile de référence
(σ_{pol} de l'ordre de 0,05 à 0,10 milliradian).

Ces boulets doivent donc être caractérisés par un σ_{Δ_0} de l'ordre de 0,07 milliradian ou moins. Il doit en être de même avec les projectiles expérimentés car si on appelle d_0 le déplacement transversal de la volée (lors du passage à la bouche) on peut *supposer que* Δ_0 est de l'ordre de d'_0/V_0, et l'influence de la forme du projectile sur la dispersion de d'_0 est vraisemblablement faible « à balistique intérieure constante ».

4.4.3. *Influence de la dispersion des vitesses de tangage ou de lacet à la volée.*

Compte tenu du paragraphe 4.4.2., nous pouvons donc écrire :

48 $$\sigma_N \simeq X\sigma \begin{pmatrix} \varkappa\zeta'_0 \\ -\mu/A \end{pmatrix}.$$

En air calme, c'est le *terme prédominant de la dispersion des coups au cours du tir*, (les conditions préalables de la précision du tir étant satisfaites).

Il s'agit donc de réduire la dispersion du groupement :

49 $$\frac{\varkappa}{-\mu/A}\zeta'_0 = \boxed{\frac{1}{V_0}\begin{pmatrix} C'_N - C_X \\ C'_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -l_g \end{pmatrix}\frac{A}{am}}\,\zeta'_0.$$

Les *termes encadrés* sont pratiquement des *constantes liées à la définition* de l'arme et de la munition, alors que ζ'_0 *est une variable aléatoire.*

L'influence des mouvements de volée, et celle des gaz de bouche sur σ_λ, doit être étudiée de plus près, en cherchant à préciser en particulier l'influence de la vitesse initiale V_0, de la masse ou du calibre a, du moment d'inertie A, de la pression à la bouche P_b, et celle de la position du centre de gravité du projectile.

NOTA. — *a.* Il est entendu que nous donnons à ζ'_0 *sa valeur d'adaptation* au premier maximum d'obliquité ζ_{M_1} :

$$\zeta'_0 \simeq \sqrt{-\mu/A}\,\zeta_{M_1}.$$

La mesure directe de ζ'_0 échappe en effet aux procédés actuels de mesure (contrairement à celle de ζ_{M_1}) et, la perturbation initiale étant prolongée par le souffle de bouche, le passage à la volée ne correspond pas forcément au maximum de ζ'_0.

b. Dans le cas des projectiles étudiés C_λ est petit devant C'_λ et par suite l'expression 49 se simplifie :

50 $$\frac{\varkappa}{-\mu/A}\zeta'_0 \simeq \boxed{\frac{1}{V_0}\left(\frac{1}{-l_g}\right)\frac{A}{am}}\,\zeta'_0.$$

4.4.4. *Influence directe des mouvements de volée sur* ζ'_0.

a. Appelons ζ'_{M_0} la vitesse de tangage communiquée directement au projectile par les mouvements de volée. On peut écrire :

$$\zeta'_{M_0} = \zeta'_{B_0} + \zeta'_{R_0}.$$

Dans cette expression, ζ'_{B_0} représente la *vitesse de tangage positivement communiquée* au projectile par le contact du canon sur ses guidages à la fin du parcours dans l'âme (ou *au début du largage*); ζ'_{R_0} représente le supplément de vitesse de tangage *progressivement communiqué* au projectile par le contact des guidages arrière pendant la *fin du largage.*

b. L'application au largage des théorèmes des quantités de mouvement et du moment cinétique donne :

51

$$\zeta'_{M_0} \leqslant \zeta'_{B_0} + \frac{g + d''_0}{2V_0}, \qquad (1)$$

(d''_0 représente l'accélération latérale de la volée au moment du passage du projectile à la bouche).

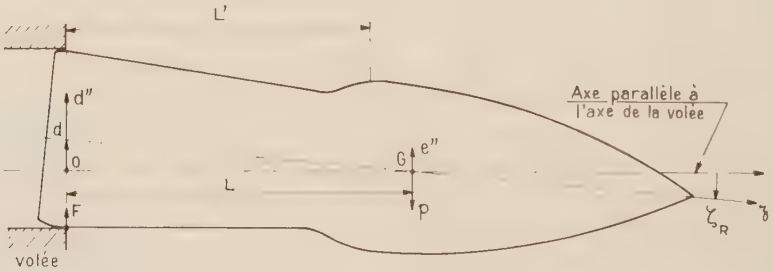


Fig. 12. — Largage du mobile

(1) Soit F la force de liaison appliquée par le tube sur le guidage arrière, on a suivant la figure 12 :

$$F - mg = me'' = m\left(d'' + L\zeta''_R\right), \quad -LF = A\zeta''_{R_0},$$

d'où :

$$\zeta''_R \simeq -\frac{Lm(g + d'')}{A + mL^2}, \quad \zeta'_R \simeq -\frac{Lm(g + d'')}{A + mL^2}\,\frac{L'}{V_0}.$$

Si le rayon de giration, associé à A, est inférieur aux longueurs L et L' (cas le plus fréquent) il vient :

$$|\zeta'_R| < \frac{g + d''}{2V_0}.$$

Il est d'ailleurs possible d'annuler le supplément de vitesse ζ'_{R_0} en assurant le largage simultané des guidages avant et arrière [1]. (Voir fig. 12.)

4.4.5. *Cas du canon ou de l'effet canon.*

Influence du souffle de bouche sur ζ'_0 (voir fig. 14).

a. L'impulsion de tangage (ou de lacet) ζ'_1, communiquée directement au projectile par les mouvements de volée, est prolongée par l'action du *souffle des gaz.*

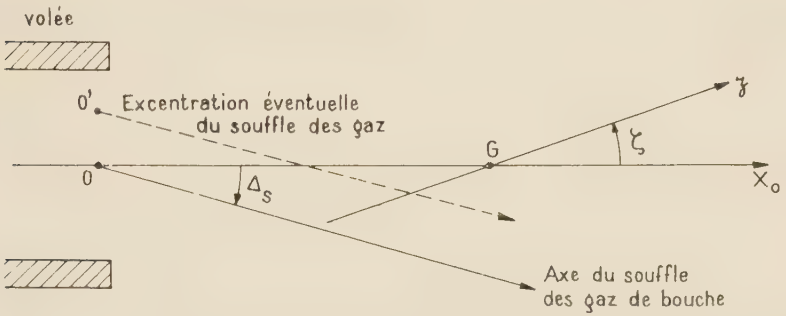


Fig. 14. — Action des gaz de bouche

NOTA. — Dans le plan de la figure, la *déviation* Δ_s (négative) donne une composante positive à ζ'_{s_0}, et l'excentration OO' (positive) donne une composante négative à ζ'_{s_0}.

[1] Un essai de bouche à feu a été réalisé dans cette intention. Le tube présentait un chambrage de volée de longueur égale à la longueur de guidage (voir fig. 13). Le guidage avant était

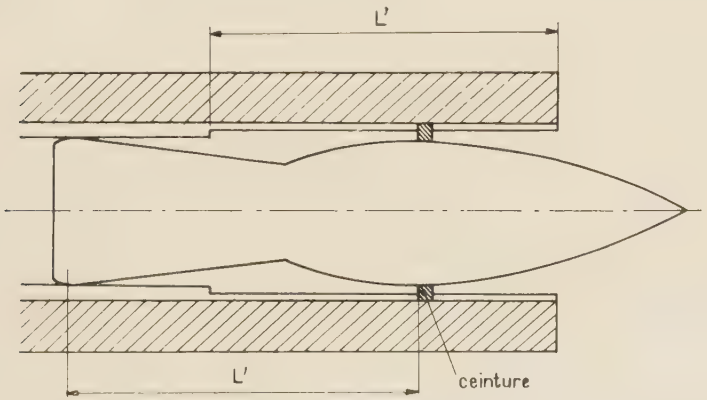


Fig. 13. — Chambrage de volée

maintenu par le seul coulissement de la ceinture dans les fonds de rayure à hauteur du chambrage. Cet essai n'a pas apporté d'amélioration significative, peut-être parce qu'une telle organisation augmentait sensiblement les perturbations apportées au projectile par le souffle de bouche.

On peut définir sur le mobile soumis au souffle des gaz des coefficients de portance et de moment par analogie aux coefficients aérodynamiques du mobile vis-à-vis de l'atmosphère. Des mesures en *écoulement inversé* ont d'ailleurs été effectuées, par le Laboratoire des Recherches Balistiques et Aérodynamiques de VERNON, sur des formes correspondant à celles des empennés expérimentés.

On définira ainsi :

$$c'_{N_s},\ c'_{M_s},\ l_s \quad (\text{avec } c'_{M_s} = l_s c'_{N_s}).$$

L'action des gaz sur le projectile se traduira alros par le supplément de vitesse de tangage $\zeta'_S(t)$:

$$\boxed{52} \qquad \zeta'_{S_0} = \zeta'_S(t_s) = \int_0^{t_s} \frac{a^3}{A}\,\frac{\pi}{8}\,q_S C'_{M_s}\,\zeta_S dt.$$

Dans cette relation :

— q_S représente la pression d'arrêt, dans l'axe du souffle de bouche, des gaz sur le projectile lancé à V_0 (1),

— t_S représente la durée de l'action des gaz de bouche sur le projectile,

— et l'imaginaire ζ_S a pour valeur $\zeta_S = \zeta - \Delta_S$ (Δ_S représente la déviation du souffle des gaz vis-à-vis de l'axe de la volée à l'instant O).

NOTA. — La relation | 52 | prête à discussion, car en fait dès le largage, le souffle de bouche n'est pas centré sur la munition. Il faut donc donner à ζ_S une *valeur d'adaptation* à ζ'_S pour tenir compte de cette excentration.

b. En remplaçant $q_s(t)$ par une constante d'adaptation q'_s dont l'effet serait équivalent il vient :

$$\zeta'_{S_0} = \sqrt{\frac{a^3}{A}\,\frac{\pi}{8}\,q_s^+ C'_{M_s}}\;\zeta_{S(0)}\,.\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{a^3}{A}\,\frac{\pi}{8}\,q_s^+ C'_{M_s}}\;t_s,$$

soit, dans le cas des faibles incidences,

$$\zeta'_{S_0} \simeq \frac{a^3}{A}\,\frac{\pi}{8}\,q_s^+ C'_{M_s}\,\zeta_{S(0)}\,t_s\,.$$

Cette relation peut s'écrire :

$$\boxed{53} \qquad \boxed{\zeta'_{S_0} \simeq K_S C'_{M_s}\,\frac{a^4}{A}\,\frac{P_b}{V_0}\,\zeta_{S(0)}}\ ,$$

(1) Il serait intéressant de connaître la forme de l'évolution de $q_s(X)$ le long de l'axe, et de connaître les variations des grandeurs :

$$\overline{q_s} = 1/t_s \int_0^{t_s} q_s\,dt, \qquad t_s = t\left(q_s = \frac{1}{10}\,q_{s_0}\right) - t_0,$$

en fonction, en particulier de a, P_b, et V_0.

en donnant au coefficient sans dimension K_g la valeur :

$$K_g = \frac{\pi}{8} \frac{L}{a/V_0} \frac{q}{P_b}.$$

4.4.6. Nouvelle expression de la dispersion de Δ_y.

a. On a :

$$\zeta'_{z0} = \zeta'_{zM_0} + \zeta'_{zS_0},$$

et les relations [50] et [53] permettent d'écrire :

$$[54] \quad \sigma_y = \frac{X}{-l_g} \left(\left| \frac{l}{a} \frac{A}{m} \frac{l}{V_0} \sigma\zeta'_{zM_0} \right| + K_g C_{N_\alpha} l \frac{a^2}{m} \frac{P_b}{V} \sigma\zeta_{zS} \right).$$

b. Au cours des tirs d'étude, l'influence du moment d'inertie A sur σ_y n'a pu être mise en évidence.

Entre autres, un tir par coups alternés avec des moments d'inertie A variant du simple au double (et avec par ailleurs des poids, des centres de gravité, et des profils identiques), n'a pas donné de variations significatives de l'écart-type.

c. Dans le cas des mobiles analogues au projectile de référence, nous admettrons donc que le premier terme de la relation [54] est petit devant le second et nous écrirons :

$$55 \quad \sigma_{pol} \simeq \sigma_y \simeq X \frac{l_g}{l_g} \frac{a^3}{m} \frac{P_b}{V_0^2} C'_{N_\alpha} K_g \sigma\zeta_{zS(D)}.$$

4.4.7. Conséquence, comparaison avec l'expérience.

Cette relation est à rapprocher des observations effectuées sur des projectiles voisins du projectile de référence.

a. L'avancée du centre de gravité conduit à une amélioration de la précision. l_g doit donc être petit devant l_s, mais cette avancée est limitée par les servitudes du chargement et celles de la résistance au tir.

b. Pour un canon donné et une famille donnée de projectiles le groupement $U_1 = \left| \frac{a^3}{l_g} \frac{P_b}{m V_0^2} \right|$ est une variable lente de l'accroissement de V_0 ou de l'allégement de la munition, par ailleurs les variations de σ_y (ou plutôt de σ_{pol}) avec V_0 et m n'ont pas paru expérimentalement significatives.

c. En tirant dans des matériels plus puissants le groupement U_1 a été diminué de 2 à 1 mais la précision n'a été que légèrement améliorée (moins de 20 %).

Tout semble se passer comme si :

— Le groupement :

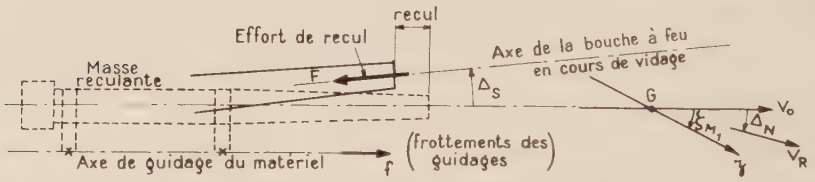
$U_2 = \boxed{C'_{u_1} K_S \sigma \zeta_{s_0}}$ était sensiblement un invariant lié au canon et au genre de la munition ;

— L'amélioration du produit $U_1\ U_2 = \frac{1}{X}\sigma_\gamma$ resterait difficile, car la diminution U_1 serait accompagnée d'un accroissement de U_2 (canons plus longs affectés de plus fortes vibrations, contraintes plus sévères sur les guidages).

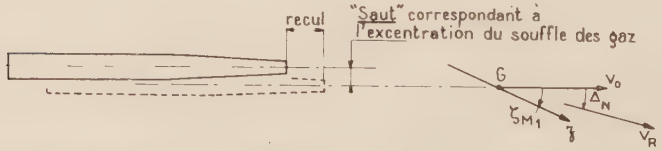
4.48. *Modifications du couple canon/munitions susceptibles d'améliorer la précision au tir.*

Les conditions préalables de la précision étant remplies, *l'amélioration de celle-ci est donc difficile*. On dispose néanmoins de certaines possibilités technologiques qu'il est bon de citer à titre d'information.

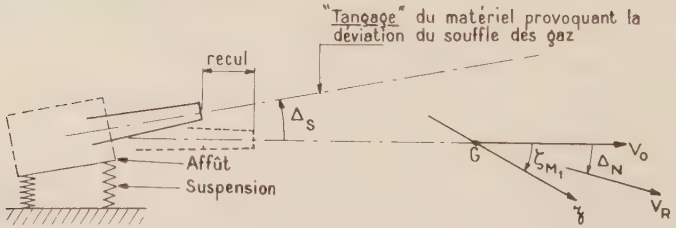
a. Le $|l_g|$ peut être augmenté sans modifier le centrage ni allonger l'em-



Action d'une excentration des guidages de la bouche à feu



Effet du "saut" du matériel de lancement



Effet du "tangage" du matériel de lancement

Fig. 15. — Mouvement de volée et souffle de bouche en fonction de l'organisation du matériel

pennage [1] (donc à C'_{N_1} et à l_s constants) avec des ogives à faible portance et peu déstabilisantes. L'accroissement de la traînée $\left(\text{donc de T et de } T - \frac{X}{V_0}\right)$ limite cette possibilité. Un tel accroissement de $|l_g|$ obtenu par diminution de la portance d'ogive a donné *expérimentalement un accroissement de la précision* $\left(\frac{d\sigma_N}{\sigma_N} \simeq -\frac{d|l_g|}{|l_g|}\right)$.

b. Il est intéressant de rechercher des canons animés de faibles mouvements de volée pour diminuer ζ'_0 (ou ζ_{M_1}). A cette fin, il est bon de placer la ligne de feu du canon et le centre de gravité de la masse reculante au plus près de l'axe des guidages de celle-ci. Dans le cas contraire on observe des ζ_{M_1} importants (voir fig. 15), et une dispersion plus forte.

c. La stabilité de l'affût est aussi à rechercher, l'excentration du souffle de bouche après largage provoque aussi des ζ_{M_1} qui peuvent devenir rédhibitoires si le « saut » ou le tangage du matériel au tir est trop important (voir fig. 15) : l'accroissement de ζ_s lié au saut ou au tangage semble bien expliquer les fortes obliquités observées dans ces deux cas.

NOTA. — L'action de la *position des tiges du lien élastique*, interposé entre la bouche à feu et l'affût, sur les obliquités initiales n'a pu être mise en évidence (essai d'un matériel d'études avec 2 liens symétriques par rapport à la masse reculante, et utilisation alternée de chacun de ces liens).

d. L'étanchéité du montage est à rechercher. Elle diminue les *gradients de pression* de part et d'autre du projectile pendant le parcours dans l'âme et au moment du largage. De plus *les laminages de gaz*, à travers un montage défectueux, peuvent provoquer des érosions sur les guidages du projectile et sur le cône de forcement.

Par ailleurs certaines formes de culot donnent, en écoulement inverse à la soufflerie, des C'_{M_1} plus faibles que les culots profilés ou à chanfrein. Au tir l'emploi de ces formes de culot est apparu expérimentalement avantageux.

e. L'importance de certaines perturbations qui accompagnent le *parcours dans l'âme* (*battements*...) peut être diminuée par le soin apporté à la définition de l'âme du tube ou des guidages du projectile : choix du vent diamétral, des métaux en contact, du profil des rayures, de la largeur des ailettes, des états de surfaces... De toute manière les *engagements d'ailettes* [2] sont à proscrire et on ne peut tolérer que de très légères prises de rayure sur les guidages.

f. D'autres perturbations trouvent leur origine au *niveau de la chambre*. Le tangage de vitesse ζ'_0, *et sa dispersion d'un coup à l'autre*, constituent pour une part la réponse aux vibrations réciproques du canon et du projectile soumis à la pression des gaz et qui prennent naissance *au moment de l'allu-*

[1] Dans le cas des empennés déployants, le repliement des empennages vers l'avant devrait conduire à un C'_{M_1} plus faible que la solution contraire.

[2] Ceci suppose, par exemple, soit un sous-calibrage très prononcé de l'empennage, soit une largeur de rayure nettement inférieure à celle des ailettes à leur périphérie, soit encore des ailettes à déploiement latéral.

mage de la charge propulsive et au moment du forcement (du fait d'un allumage de la charge propulsive insuffisant ou trop puissant d'une mise à poste peu précise du projectile ou de la charge propulsive...).

« Le projectile se souvient, au moment du passage à la bouche, de ce qu'il a subi dans la chambre. » Il y a donc intérêt à :

— bien centrer, en position et direction, le projectile dès la mise à poste;

— éviter le glissement des éventuelles ceintures d'étanchéité hors de leur logement au moment du forcement;

— disposer de charges bien symétriques régulièrement et symétriquement allumées [1].

g. Dans certains cas, des éléments largables (à la bouche) sont utilisés pour assurer l'étanchéité ou le guidage dans l'âme.

Il faut alors rechercher pour ces éléments :

— la rapidité et la symétrie du largage à la bouche;

— une masse réduite et une faible surface dans le souffle des gaz.

4.5 Effet de la précision du tir sur la probabilité d'atteinte, critères de précision.

4.5.1. *Position du problème.*

a. Les effets de la dispersion du tir tendu sur la probabilité d'atteinte seront *délimités*, en examinant le cas où ceux-ci sont les plus importants c'est-à-dire le cas où *les erreurs de réglages* sont relativement *faibles* et où la fidélité du système est bonne.

b. Il faut rappeler que le tir tendu pratiqué généralement à vue de la cible et à courte portée doit permettre *le coup au but :*

— si possible au 1er coup,

— sinon au 2e coup et, à la rigueur, au 3e coup.

La cible adverse de référence peut être définie de différentes façons, par exemple par les *silhouettes rectangulaires* suivantes qui serviront de référence :

— cible fixe A..... 1,00 m × 1,00 m
— cible fixe B..... 2,00 m × 2,00 m
— cible fixe C..... 4,00 m × 4,00 m
— cible mobile D (en déplacement latéral)..... 2,00 m × 4,00 m

4.5.2. *Ordre de grandeur minimal de la dispersion d'un tir à l'autre et des imperfections de préparation ou de réglage du tir.*

a. Dans l'état actuel de la technique des systèmes à tir tendu et de leurs

[1] Des essais ont montré que l'excentration du sachet de poudre propulsive provoquait des altérations transversales significatives, et que le déplacement longitudinal du sachet de poudre pouvait provoquer non seulement un dV_0 mais aussi une variation des altérations transversales.

conduites de tir, une *estimation optimiste* de la dispersion du tir « d'un tir à l'autre » caractérisée par σ_T, et des erreurs de préparation de tir ou de réglage caractérisées par σ_P ou σ_R, est donnée par le tableau III ci-après :

TABLEAU III

Cas	Écarts-types					
	σ_T (dispersion d'un tir à l'autre)		σ_P (préparation du tir)		σ_R (réglage du tir)	
	En hauteur $(\sigma_T)_y$	En direction $(\sigma_T)_z$	En hauteur $(\sigma_P)_y$	En direction $(\sigma_P)_z$	En hauteur $(\sigma_R)_y$	En direction $(\sigma_R)_z$
	m	m	m	m	m	m
A.....	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
B.....	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
C.....	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
D.....	0,5	1,5	0,5	0,5		

b. Ce tableau suppose :

— des servants habiles et bien entraînés;

— un pointage soigné effectué dans des conditions voisines de celles du polygone;

— un réglage initial correct et fidèle de l'optique lié au système;

— des durées de trajet relativement courtes (de l'ordre de la seconde) ou des conduites de tir très perfectionnées;

— le réglage du 2e coup dans les meilleures conditions (1er coup sensiblement en direction c'est-à-dire $\sigma_{\overline{W}} < 1\ m$).

4.5.3. *Évaluation optimiste de la dispersion globale.*

Si le mobile est relativement insensible au vent, on aboutit à l'évaluation suivante, nettement optimiste, de la « dispersion globale » correspondant à des erreurs de réglage limitées, à une faible « dispersion d'un tir à l'autre », et à un *vent modéré*;

— *dans le cas des 1ers coups.*

$$(\sigma_{G_1})_y^2 \simeq (\sigma_{pol})_y^2 + 0{,}5^2, \qquad \text{en hauteur,}$$

et,

$(\sigma_{G_1})_z^2 \simeq (\sigma_{pol})_z^2 + 0{,}5^2$, en direction et sans vitesse transversale du but,

ou

$(\sigma_{G_1})_z^2 \sim (\sigma_{pol})_z^2 + 1{,}5^2$, en direction et avec vitesse transversale du but; (2 à 10 m/s par exemple);

— *dans le cas des 2e ou 3e coups :*

$(\sigma_{G_2})_y^2 \simeq 2\,(\sigma_{pol})_y^2 + 0{,}5^2$, en hauteur,

$(\sigma_{G_2})_z^2 \sim 2\,(\sigma_{pol})_z^2 + 0{,}5^2$, en direction et sans vitesse transversale du but,

(On n'envisage pas le cas du 2e coup avec vitesse transversale du but car il s'agit en fait d'un nouveau tir.)

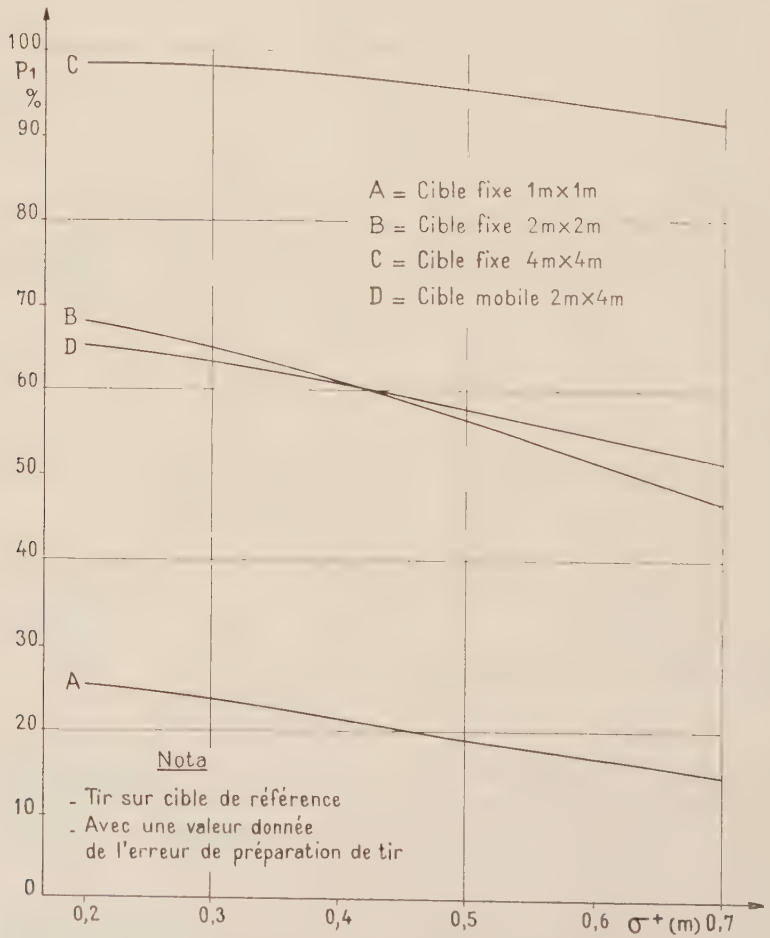


Fig. 16. — Effet de la précision du mobile sur la probabilité d'atteinte au 1er coup

4.5.4. *Effet maximal de la dispersion intrinsèque du tir sur la probabilité d'atteinte.*

a. A cette évaluation optimiste de la « dispersion globale » correspond en valeur relative l'effet maximal, sur la probabilité d'atteinte, de la dispersion intrinsèque du tir (ou dispersion des coups mesurée au cours du tir au polygone).

Cet effet maximal sur la probabilité d'atteinte au 1er, 2e ou 3e coup est résumé dans le cas des tirs tendus et des silhouettes de référence, par le tableau IV. Ce tableau a été obtenu en caractérisant la précision intrinsèque du mobile par l'écart-type de la dispersion du tir sur polygone supposé du même ordre en hauteur et en largeur,

$$(\sigma_{pol})_y \sim (\sigma_{pol})_z = \sigma^+,$$

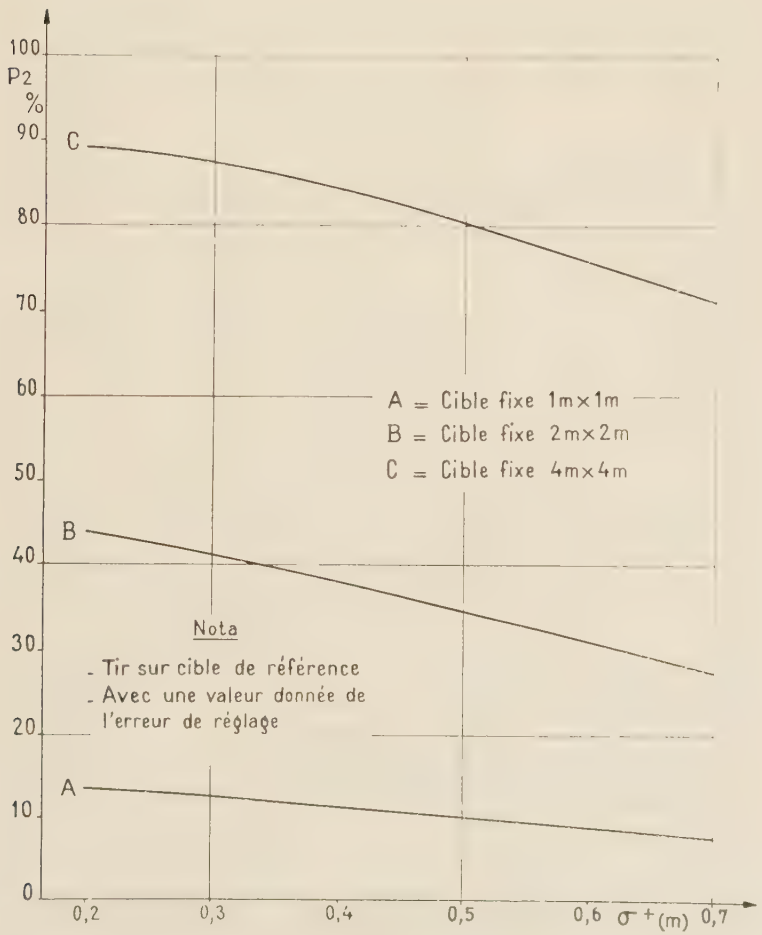


Fig. 17. — Effet de la précision du mobile sur la probabilité d'atteinte au 2e coup

en échelonnant σ^+ de 0,2 à 0,7 *m* et en supposant que la dispersion globale d'écart-type

$$(\sigma_{(i)})_y, \quad (\sigma_{(i)})_z,$$

était affectée d'une loi normale de distribution [1] centrée sur le milieu de la cible.

b. Ce tableau montre que l'effet de la dispersion intrinsèque du tir est relativement *peu marqué* dans le cas des tirs sur cible de 2 m (ou plus) de côté, et en particulier dans le cas des premiers coups.

L'effet est *plus net* sur la cible de 1 m de côté, et en particulier dans le cas des 2e coups (et *à fortiori* pour les 3e coups). Les résultats de ce tableau trouvent leur représentation graphique dans les courbes des figures 16, 17, 18 et 19.

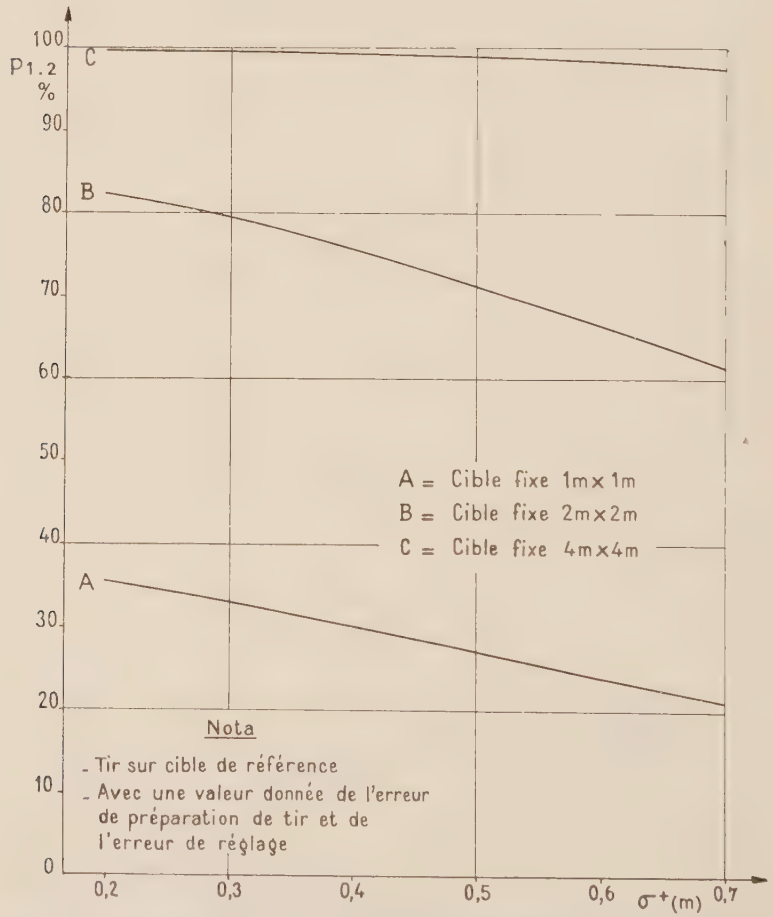


Fig. 18. — Effet de la précision du mobile sur la probabilité d'atteinte cumulée des 2 premiers coups

[1] Comme cela a été vérifié expérimentalement pour $(\sigma_{pol})_y$ et $(\sigma_{pol})_z$.

4.5.5. *Critère de précision, comparaison avec l'expérience.*

Le tableau III ci-dessus montre aussi que, dans les conditions très favorables de préparation et de réglage qui viennent d'être précisées, si la dispersion du tir sur polygone satisfait à la condition de précision en air calme,

56	$\sigma^{+} < 0{,}5$ m

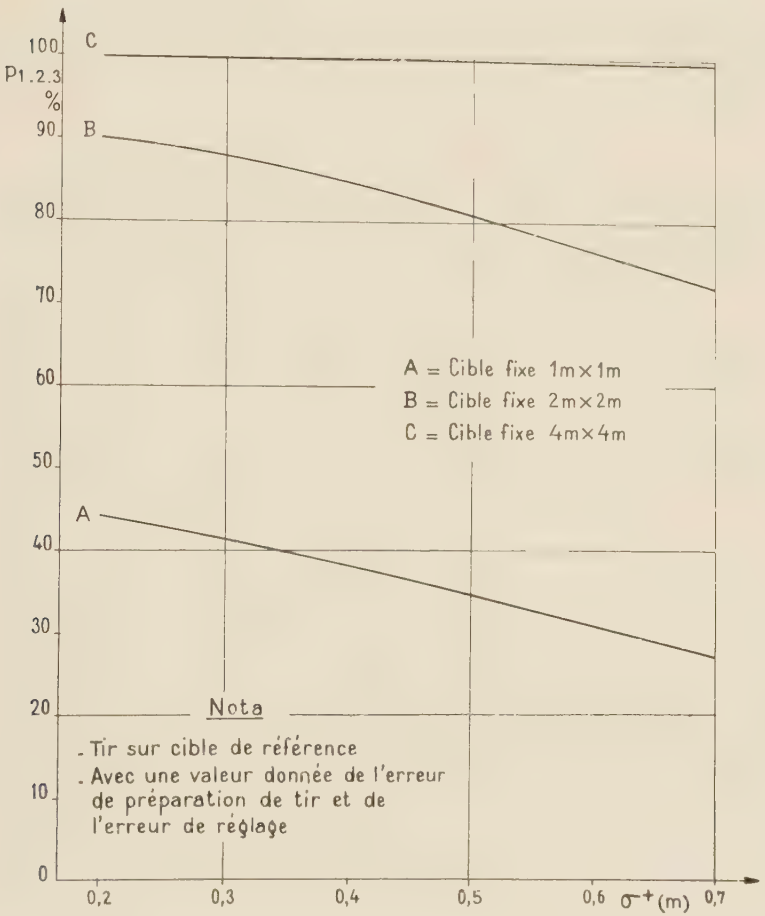


Fig. 19. — Effet de la précision du mobile sur la probabilité d'atteinte cumulée des 3 premiers coups

on peut compter au premier coup sur :

— 2 coups sur 3 au but dans le cas des cibles de 2 m de côté ou plus;

— 1 coup sur 4 au but dans le cas de la cible de 1 m de côté.

Dans l'état actuel de la technique ce critère semble donc devoir être retenu comme condition nécessaire de précision intrinsèque des tirs tendus effectués contre des cibles de l'ordre de 2 m de côté.

TABLEAU IV. — EFFET DE LA PRÉCISION DU MOBILE SUR LA PROBABILITÉ D'ATTEINTE

Probabilité d'atteinte	Cas	Cible	Valeur de σ^+ (m)					
			0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
P_1 % (cas du 1er coup)	A	1 m × 1 m (fixe)	0,2537	0,2351	0,2132	0,1903	0,1682	0,1479
	B	2 m × 2 m (fixe)	0,6821	0,6512	0,6101	0,5643	0,5170	0,4694
	C	4 m × 4 m (fixe)	0,9866	0,9817	0,9718	0,9573	0,9378	0,9128
	D	2 m × 4 m (mobile)	0,6523	0,6339	0,6088	0,5800	0,5484	0,5152
P_2 % (cas du 2e coup)	A	1 m × 1 m (fixe)	0,1366	0,1259	0,1133	0,1004	0,0882	0,0771
	B	2 m × 2 m (fixe)	0,4410	0,4131	0,3791	0,3429	0,3072	0,2731
	C	4 m × 4 m (fixe)	0,8940	0,8725	0,8425	0,8048	0,7613	0,7132
P_{1-2} % (cas d'un tir de 2 coups)	A	1 m × 1 m (fixe)	0,3556	0,3314	0,3023	0,2716	0,2416	0,2136
	B	2 m × 2 m (fixe)	0,8223	0,7953	0,7579	0,7137	0,6654	0,6143
	C	4 m × 4 m (fixe)	0,9986	0,9977	0,9956	0,9917	0,9852	0,9750
P_{1-2-3} % (cas d'un tir de 3 coups)	A	1 m × 1 m (fixe)	0,4436	0,4156	0,3813	0,3447	0,3085	0,2742
	B	2 m × 2 m (fixe)	0,9007	0,8799	0,8497	0,8119	0,7682	0,7196
	C	4 m × 4 m (fixe)	0,9999	0,9997	0,9993	0,9984	0,9965	0,9928

CINQUIÈME PARTIE

EXTENSION DE LA THÉORIE

PRÉCISION DES EMPENNÉS À PROPULSION ADDITIONNELLE

(Recherche des lois optimales de propulsion)

POSSIBILITÉS D'OPTIMALISATION, HYPOTHÈSES COMPLÉMENTAIRES, NOUVELLE EXPRESSION DE L'INCIDENCE.

CALCUL DES LOIS OPTIMALES.

EFFET DES PERTURBATIONS ÉVENTUELLES APPORTÉES PAR LA PROPULSION ADDITIONNELLE.

CAS OÙ LES HYPOTHÈSES COMPLÉMENTAIRES NE SONT PLUS APPLICABLES.

5.1. Possibilités d'optimalisation. nouvelles hypothèses complémentaires. Nouvelle expression de l'incidence.

5.1.1. *Effets de la nutation initiale.*

On a vu que la nutation initiale est un facteur important de la dispersion du tir, et que dans le cas des tirs tendus exécutés avec des mobiles empennés dont la précision balistique a été améliorée,

— par le dosage de la vitesse de roulis,

— par la limitation des imperfections de symétrie et de la traînée,

la nutation initiale constitue la source principale de dispersion des coups au cours du tir.

Ce résultat a été précisé dans les chapitres précédents.

5.1.2. *Effets attendus d'une propulsion additionnelle à court retard.*

Au cours de la nutation, le mobile est soumis à une force latérale sensiblement proportionnelle à l'incidence, ou obliquité. Après amortissement le mobile présente une vitesse latérale égale à l'intégrale des accélérations latérales subies au cours de la nutation. Cette vitesse latérale provoque une déviation de la trajectoire.

En l'absence de poussée additionnelle cette intégrale ne s'annule qu'exceptionnellement. Par contre, dans le cas contraire, la *force latérale unitaire* F'_L peut être *modulée* par le jeu d'une *poussée axiale* P [1]. Le choix d'une modulation convenable et, sous réserve des hypothèses exposées plus loin, sa *réalisation effective* avec un jet propulsif devraient permettre d'annuler, ou tout au moins de *diminuer, à tous les coups,* la valeur de la *déviation* de nutation. Une amélioration de la précision au tir devrait en résulter.

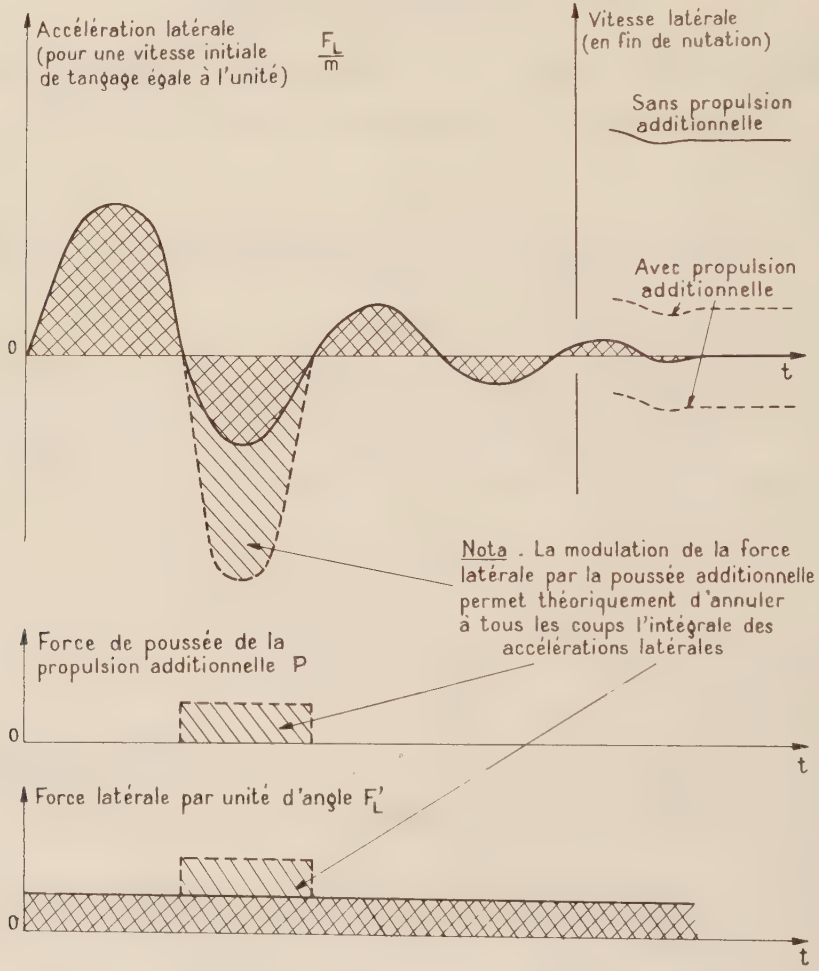


Fig. 20. — Effet favorable d'une poussée axiale déclenchée avec un court retard (Cas d'un mouvement plan)

La figure 20 correspond au mouvement plan d'un mobile dépourvu de roulis. Elle donne une idée de l'*effet favorable* d'une *impulsion* axiale déclenchée avec un *retard* de l'ordre d'une période de nutation.

[1] Il est rappelé que : $F'_L \backsimeq (F'_N - F_T + P)$ voir § 5-1-4-*d*, renvoi 1.

Le chapitre suivant va chercher à préciser cet effet favorable et à définir les lois de propulsion optimales quant à la précision des tirs tendus.

En plus des avantages inhérents à la propulsion additionnelle,

— diminution des durées de trajet et de la flèche,

— diminution éventuelle de la valeur du groupement $\left(T - \frac{X}{V_0}\right)$ et par suite de l'effet du vent transversal,

ces lois optimales devraient permettre une amélioration de la précision des mobiles autopropulsés et semi-autopropulsés.

Dans certains cas et *sous réserve de vérifications expérimentales* des hypothèses, elles pourraient améliorer aussi la précision des empennés non autopropulsés par apport d'une impulsion momentanée convenablement dosée.

5.1.3. *Rappels de certains résultats des chapitres précédents.*

a. Le mouvement autour du centre de gravité est défini par l'incidence ζ et il a été posé

$$\zeta = \zeta_\nu + \zeta_P + \zeta_D.$$

L'incidence ζ_P étant généralement très faible, les relations | 7 | et | 13 | permettent d'écrire le plus souvent [1] :

| 57 |

$$\zeta_N \simeq \zeta'_{N_0} \frac{1}{\omega_T} \sin \omega_1 t \exp\left[\left(i\frac{C}{2A}\omega - \frac{\varkappa + h}{2}\right)t\right],$$
$$\zeta_D = \nu\zeta_m = \nu\zeta_{m_0} \exp(i\omega t),$$
$$\zeta_P \simeq 0,$$

avec :

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{-\mu}{A}}; \quad \nu = \frac{1}{(\omega/\omega_c)^2 - 1}; \quad \omega_c = \sqrt{\frac{-\mu}{A - C}}.$$

b. L'altération de la trajectoire, induite par les mouvements autour du centre de gravité, peut être définie par la déviation Δ subie par la trajectoire altérée

$$\Delta = \delta\tau + i\eta \cos\tau_1.$$

Les chapitres précédents ont montré que si la déviation Δ est prise au voisinage de la bouche on a au voisinage du point d'impact :

| 58 |

$$\Delta \simeq d\alpha + id\beta.$$

expression où $d\alpha$ *et* $d\beta$ représentent les « angles de relèvement » et de « fouettement latéral ».

[1] Voir les remarques et les hypothèses du paragraphe 2.5.3.*c* ainsi que les relations 7, 7*bis* et 7*ter*.

De plus il a été montré que les solutions ζ_1 et ζ_{II} induisent ainsi entre $t = 0$ et $t \longrightarrow \infty$, les déviations :

27 $$\boxed{\Delta_1 \simeq \varkappa \left(\frac{A}{-\mu}\right) \zeta'_{N_0}}, \quad \left(\Delta_1 \simeq \varkappa \left(\frac{A}{-\mu}\right) \zeta'_{0},\ si\ \zeta_m = 0\right);$$

35 $$\boxed{\Delta_{DG} = \varkappa \left[\left(\frac{\varkappa + h + i\omega}{-\mu/A}\right) \zeta_{g_0} + \left(\frac{i}{\omega} - \left(\frac{\varkappa + h + i\omega}{-\mu/A}\right) \nu\right) \zeta_{m_0} + \frac{i}{\omega} \zeta_{l_0}\right]}.$$

5.1.4. *Adaptation des hypothèses et des résultats au cas de la propulsion additionnelle.*

a. Il est supposé que les hypothèses du chapitre 1 sont toujours valables mais que de plus :

— le déclenchement de la propulsion additionnelle (force de poussée P) à l'instant t_1 et son arrêt à l'instant t_2 sont des phénomènes instantanés;

— la présence de la force de poussée P introduit une modification également instantanée du système des forces appliquées (modification de $\vec{F}_L$, $\vec{F}_T$, $\vec{M}$, $\vec{H}$ ...).

b. Ces hypothèses sont physiquement inexactes, mais on peut penser que l'établissement *des régimes transitoires* est suffisamment rapide *et suffisamment reproductible* pour permettre de donner à t_1 et t_2 *des valeurs d'adaptation* indépendantes de la condition initiale ζ'_0 et ne dépendant que des caractéristiques nominales du propulseur et de sa chaîne d'allumage.

c. Il est supposé également, *conformément aux observations expérimentales* que le mobile présente au largage une nutation dont *la phase est peu dispersée d'un coup à l'autre* (la bouche du lanceur correspond sensiblement à un nœud).

d. Le moment stabilisant et la force latérale s'écrivent alors :

$$\text{Affixe } (\vec{M}_1) = \mu_1(\zeta + \zeta_m)\, e^{-i(\varphi+\Phi)},$$
$$\text{Affixe } (\vec{F}_{L_1}) = (F'_{N_1} - F_{T_1})\ (\zeta + \zeta_l) = \varkappa_1 m V(\zeta + \zeta_l),$$

avant déclenchement de la poussée (Phase I);
puis :

$$\text{Affixe } (\vec{M}_2) = \mu_2(\zeta + \zeta_m)\, e^{-i(\varphi+\Phi)},$$
$$\text{Affixe } (\vec{F}_{L_2}) = (F'_{N_2} - F_{T_2} + P)\ (\zeta + \zeta_l) = \varkappa_2 m V(\zeta + \zeta_l),$$

en présence de la poussée (Phase II); et :

$$\text{Affixe } (\vec{M}_3) = \mu_3(\zeta + \zeta_m)\, e^{-i(\varphi+\Phi)},$$
$$\text{Affixe } (\vec{F}_{L_3}) = (F'_{N_3} - F_{T_3})\ (\zeta + \zeta_l) = \varkappa_3 m V(\zeta + \zeta_l),$$

après arrêt de la poussée (Phase III);
(F'_ν représente la force normale, par unité d'angle) [1].

5.1.5. *Nouvelle expression de l'incidence de nutation.*

Le mouvement autour du centre de gravité est alors défini par

59

$$(\zeta_\nu)_1 = \frac{\zeta'_{N_0}}{\omega_1} f_1^{\frac{t}{T_1}} \sin\omega_1 t,$$

$$(\zeta_\nu)_2 = \frac{\zeta'_{N_0}}{\omega_2} K_1 f_1^{\frac{t_1}{T_1}} f_2^{\frac{t-t_1}{T_2}} \sin\omega_2(t + \varepsilon_1),$$

$$(\zeta_\nu)_3 = \frac{\zeta'_{N_0}}{\omega_3} K_2 f_1^{\frac{t_1}{T_1}} f_2^{\frac{t_2-t_1}{T_2}} f_3^{\frac{t-t_2}{T_3}} \sin\omega_3(t + \varepsilon_2),$$

avec :

$$\omega_1 \simeq \sqrt{\frac{-\mu_1}{A}}, \quad \omega_2 \simeq \sqrt{\frac{-\mu_2}{A}}, \quad \omega_3 \simeq \sqrt{\frac{-\mu_3}{A}}, \quad \left(\begin{array}{c}\text{pulsations}\\ \text{de tangage}\end{array}\right)$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{\pi}{\omega_2}, \quad T_3 = \frac{\pi}{\omega_3}, \quad \left(\begin{array}{c}\text{périodes de nutation}\\ \text{ou demi-périodes de tangage}\end{array}\right)$$

$$f_1 = \exp\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{-\mu_1}}\left(\frac{iC}{A}\omega - \varkappa_1 - h_1\right)\right], \quad f_2 = \ldots\ldots, \quad f_3 = \ldots\ldots;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\text{Arc tg}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\text{tg}\,\omega_1 t_1\right)}{\omega_2} - t_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\text{Arc tg}\left[\frac{\omega_3}{\omega_2}\text{tg}\,\omega_2(t_2 + \varepsilon_1)\right]}{\omega_3} - t_2$$

$$K_1 = \frac{\omega_2 \sin\omega_1 t_1}{\omega_1 \sin\omega_2(t_1 + \varepsilon_1)}, \quad K_2 = K_1 \frac{\omega_3 \sin\omega_2(t_2 + \varepsilon_1)}{\omega_2 \sin\omega_3(t_2 + \varepsilon_2)}.$$

NOTA. — f_1, f_2, f_3 ont respectivement pour parties réelles et imaginaires les taux d'amortissement, et les angles de précession correspondant à une période de nutation.

5.2. Calcul des lois optimales.

5.2.1. *Recherche de la déviation de nutation Δ_ν d'un mobile soumis à une poussée additionnelle constante P entre les instants t_1 et t_2.*

Soient $V\Delta'_{N_1}$, $V\Delta'_{N_2}$ et $V\Delta'_{N_3}$ les accélérations latérales subies par le mobile au cours des phases I, II et III, du seul fait de l'obliquité de nutation ζ_ν.

Après amortissement de la nutation la déviation totale Δ_ν a pour valeur :

$$\Delta_\nu = \int_0^{t_1} \Delta'_{N_1}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \Delta'_{N_2}\,dt + \int_{t_2}^{\infty} \Delta'_{N_3}\,dt.$$

[1] La force latérale présente donc successivement les valeurs unitaires suivantes :

$$F'_{L_1} = F'_{N_1} - F_{T_1}; \quad F'_{L_2} = F'_{N_2} - F_{T_2} + P; \quad F'_{L_3} = F'_{N_3} - F_{T_3}.$$

En remarquant que $\varkappa$, h et $\frac{C}{2A}\omega$ sont petits devant ω_1, ω_2, ω_3, on peut écrire :

$$\int_{t_i}^{t_j} f^{\frac{t}{T_i}} \sin \omega_i t \, dt \simeq \frac{1}{\omega_i} \left| f^{\frac{t}{T_i}} \cos \omega_i t \right|_{t_i}^{t_j},$$

et par suite il vient :

$$\boxed{60} \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_N = {} & \left(\frac{\varkappa_1}{\omega_1^2} \left(1 - f_1^{\frac{t_1}{T_1}} \cos . \omega_1 t_1 \right) \right. \\ & + K_1 \frac{\chi_2}{\omega_2^2} \left[f_1^{\frac{t_1}{T_1}} \cos . \omega_2 (t_1 + \varepsilon_1) - f_1^{\frac{t_1}{T_1}} f_2^{\frac{t_2 - t_1}{T_2}} \cos . \omega_2 (t_2 + \varepsilon_1) \right] \\ & \left. + K_2 \frac{\varkappa_3}{\omega_3^2} f_1^{\frac{t_1}{T_1}} f_2^{\frac{t_2 - t_1}{T_2}} \cos . \omega_3 (t_2 + \varepsilon_2) \right\} \zeta_0' . \end{aligned} \right.$$

5.2.2. *Possibilités d'optimalisation.*

La partie imaginaire des termes en f est souvent petite devant sa partie réelle. C'est le cas du *déclenchement* à *court retard* d'une *impulsion brève* communiquée à un mobile présentant une faible vitesse de rotation.

Il est alors théoriquement possible d'annuler Δ_N à *chaque coup* et au 2e ordre près en *choisissant* par exemple une valeur de t_1 voisine de $(2k + 1)\pi$, une valeur de t_2 voisine de $2k\pi$, et *une valeur positive convenable de la poussée additionnelle.*

5.2.3. *Étude de quelques cas particuliers.*

a. Pour simplifier l'étude des applications de la relation 60, on peut supposer que la présence de la poussée additionnelle ne modifie que légèrement les caractéristiques aérodynamiques du mobile. Cette simplification peut être interprétée comme une nouvelle réadaptation des valeurs de t_1 et t_2 [1]. Il vient alors :

$$\begin{aligned} & F'_{N_1} \simeq F_{N_2} \simeq F'_{N_3} = F'_N ; \\ & F_{T_1} \simeq F_{T_2} \simeq F_{T_3} = F_T ; \\ & \mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_3 = \mu ; \\ & T_1 \simeq T_2 \simeq T_3 = T_N ; \\ & h_1 \simeq h_2 \simeq h_3 = h ; \; f_1 \simeq f_3 ; \\ & F'_N - F_T \simeq \varkappa_1 m V \simeq \varkappa_3 m V ; \; F'_N - F_T + P \simeq \varkappa_2 m V ; \end{aligned}$$

et la relation 60 prend la forme simplifiée.

[1] Une telle simplification est naturellement acceptable *à priori* si le supplément de vitesse ΔV pris par le mobile, entre t_1 et t_2 demeure petit devant V_0.

61

$$\Delta_{\lambda} = \frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV}\left[F_N' - F_T + P f_1^{\frac{t_1}{T_N}}\left(\cos\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\,t_1 - f_2^{\frac{t_2-t_1}{T_N}}\cos\sqrt{\frac{-\mu}{A}}\,t_2\right)\right].$$

b. Les résultats suivants sont obtenus par application de cette relation.

Cas A. — *Poussée continue depuis le largage jusqu'à l'amortissement de la nutation :*

62

$$\Delta_{N_A} = \frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV}(F_N' - F_T + P).$$

Cas B. — *Poussée continue déclenchée au 1er nœud de nutation* (celui qui suit le 1er maximum d'obliquité) :

63

$$\Delta_{N_B} = [F_N' - F_T - f_1 P]\frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV}. \quad (1)$$

Cas C. — *Poussée déclenchée sous forme de courte impulsion autour du 2e maximum d'obliquité,* avec par exemple :

$$t_1 = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{A}{-\mu}}, \quad t_2 = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{\frac{A}{-\mu}}.$$

Il vient :

64

$$\Delta_{N_C} \sim \left[F_N' - F_T - \sqrt{\frac{3}{2}}\, f_1^{7/6}(1 + f_2)^{2/3}\right]\frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV}.$$

Cas D. — *Poussée déclenchée au 1er nœud d'obliquité et arrêté au 4e.*

65

$$\Delta_{N_D} = [F_N' - F_T - f_1(1 + f_2^3)P]\frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV}.$$

c. Ces trois dernières expressions sont de la forme :

$$\Delta_{N_i} = [F_N' - F_T - UP]\frac{A}{-\mu}\frac{\zeta_0'}{mV},$$

et une *amélioration* de la précision sera obtenue si :

$$|\Delta_{N_i} - | \Delta_N |,$$

(1) En fait, à la bouche du tube de lancement, la nutation présente un tout premier nœud (avant le premier maximum d'obliquité).

c'est-à-dire si :

$$0 < P < \frac{2}{U}\left(F'_N - F_T\right).$$

L'optimalisation sera obtenue en recherchant des valeurs de Δ_λ aussi faibles que possible grâce à une poussée optimale P^+.

Cette optimalisation est impossible dans le cas A, (on a même $(\Delta_\lambda)_A > (\Delta_\lambda)_0$ puisque $\varkappa_2 > \varkappa_1$).

Elle est possible dans les autres cas en recherchant pour la poussée la valeur :

$$P^+ \simeq \frac{1}{U}\left(F'_N - F_T\right),$$

c'est-à-dire :

66

$$\boxed{\begin{aligned} P_B^+ &\simeq \frac{F'_N - F_T}{|f_1|}; \\ P_C^+ &\simeq \frac{F'_N - F_T}{\sqrt{3}\,|f_1^{7/6}(1+f_2^{2/3})|}; \\ P_D^+ &\simeq \frac{F'_N - F_T}{|f_1 + f_1 \cdot f_2^3|}. \end{aligned}}$$

Avec des vitesses lentes de rotation de telles optimalisations sont possibles. *Elles supposent que la partie imaginaire des termes en f est petite,* ce qui est réalisé si :

$$-\frac{\pi}{2}\frac{C}{A}\omega\sqrt{\frac{A}{-\mu}} \quad \text{petit devant 1 dans le cas B;}$$

$$-3\frac{\pi}{4}\frac{C}{A}\omega\sqrt{\frac{A}{-\mu}} \quad \text{petit devant 1 dans le cas C;}$$

$$-2\pi\frac{C}{A}\omega\sqrt{\frac{A}{-\mu}} \quad \text{petit devant 1 dans le cas D.}$$

Cette condition peut être satisfaite dans les cas B et C avec une loi de rotation analogue à celle du projectile de référence :

$$1{,}3\sqrt{\frac{-\mu}{A-C}} < \omega < 2\sqrt{\frac{-\mu}{A}}.$$

Dans le cas D on sera vraisemblablement conduit à une loi de rotation différente, par exemple :

$$0 < \omega < \sqrt{\frac{-\mu}{A-C}}.$$

NOTA. — Avec des f_1 et f_2 de l'ordre de 0,8 on aurait :

$$P_B^+ \simeq 1{,}25\left(F'_N - F_T\right);$$

$$P_C^+ \simeq 0{,}8\left(F'_N - F_T\right);$$

$$P_D^+ \simeq 0{,}8\left(F'_N - F_T\right).$$

P^+ *demeure* donc dans ces trois cas de l'ordre de $(F'_N - F_T)$ c'est-à-dire *de l'ordre de* F'_{L_1}.

5.3. Effet des perturbations éventuelles apportées par la propulsion additionnelle.

5.31. *Effet d'un écart* dP *de la poussée par rapport à la valeur nominale* P^+.

Δ_{N_0} représentant la déviation de nutation du mobile tiré avec les mêmes conditions initiales, mais sans propulsion additionnelle, on a

$$\left| \frac{\Delta_{N(dP)}}{\Delta_{N_0}} \right| = \left| \frac{U dP}{F'_N - F_T} \right|,$$

et par suite pour les cas concrets étudiés au paragraphe 5.23, nous aurions

$$\frac{\Delta_{N(dP)}}{\Delta_{N_0}} < 1{,}5 \frac{dP}{P}.$$

Même avec une *variation de 20 % de* P^+, variation assez exceptionnelle même aux températures extrêmes, la poussée $P^+ + dP$ apporte encore une *réduction substantielle de la déviation de nutation* (les deux tiers ou mieux). Il en serait de même des effets d'une variation de l'impulsion du propulseur.

5.32. *Effet d'un écart* dt_1 *sur la valeur de* t_1 (instant du déclenchement de la poussée).

En dérivant la relation 61 il vient [1] :

$$\Delta_{N(dt_1)} = - P f_1 T_N \left(\sin \sqrt{\frac{-\mu}{A}} t_1 - f_2 \frac{t_2 - t_1}{T_N} \sin \sqrt{\frac{-\mu}{A}} t_2 \right) \sqrt{\frac{A}{-\mu}} \frac{\xi'_u}{mV} dt_1.$$

En appliquant ce résultat au cas C, par exemple, il vient :

$$\left| \frac{\Delta_{N_C(dt_1)}}{\Delta_{N_1}} \right| = \left(\frac{P}{F'_N - F_T} \right) \left| \frac{f_1}{2}^{7/6} \frac{1 - f_2^{4/6}}{\sqrt{\frac{A}{-\mu}}} \right|, \qquad \left(\text{valeur très faible de l'ordre de } \frac{\omega}{10} dt_1 \right),$$

formule valable pour les faibles valeurs de $|dt_1|$.

Pour un écart dt_1 plus important, l'application directe de la formule 61 montre que, si t_1 est défini à $\pm$ 1/6 T_N près (soit à environ $\pm 5.10^{-3}$ *s*) on a :

$$\Delta_{N_c} dt_1 < 0{,}2 \, \Delta_{N_0},$$

et l'amélioration de la précision demeure appréciable en dépit de la dispersion de t_1.

5.3.3. *Excentrement et déviation du jet propulsif.*

Les dissymétries éventuelles du jet propulsif peuvent être caractérisées

[1] En supposant que l'écart dt_1 n'affecte pas la durée de la propulsion $(t_2 - t_1)$.

par l'*excentrement* $\vec{e}$ de la tuyère et par la *déviation* ζ_j du jet propulsif par rapport à l'axe principal et longitudinal d'inertie $G\vec{z}$ (voir fig. 21).

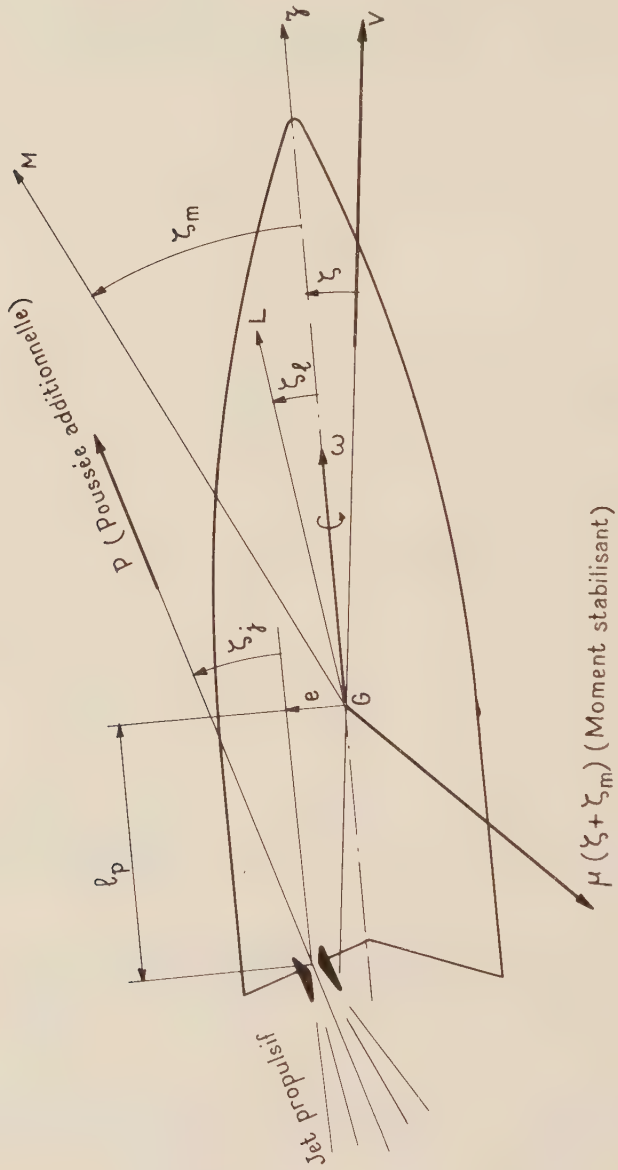


Fig. 21. — Dissymétries de la propulsion additionnelle (Dissymétries $\vec{e}$ et ζ_j, « Axe de force latérale nulle » $\vec{GL}$, et « Axe de moment nul » $\vec{GM}$, imperfections ζ_l et ζ_m)

Soit l_p la mesure algébrique de la distance du centre de gravité à la tuyère (comptée positivement de l'arrière vers l'avant du mobile). « *L'axe de moment nul* » est défini par :

$$\zeta_m = \frac{P^+}{-\mu} (\text{affixe } \vec{e} - l_p \zeta_j) + (\zeta_m)_0.$$

De même « *l'axe de force latérale nulle* » est défini par

$$\zeta_l = \frac{-P^+}{F'_N - F_T} \zeta_j + (\zeta_l)_0.$$

$(\zeta_m)_0$ et $(\zeta_l)_0$ repèrent « l'axe de moment nul » et « l'axe de force latérale nulle », en l'absence de poussée additionnelle.

5.3.4. *Effets des dissymétries éventuelles du jet propulsif.*

Soit $V\Delta_D^{+\prime}$ l'accélération latérale subie par le projectile du seul fait des dissymétries présentées par une propulsion additionnelle entre t_1 et t_2 on a

$$\Delta_D^+ = \int_{t_1}^{t_2} \Delta^{+\prime} dt = \int_{t_1}^{\infty} \Delta^{+\prime} dt - \int_{t_2}^{\infty} \Delta^{+\prime} dt,$$

et en posant

$$\zeta_l - (\zeta_l)_0 = \zeta_l^+, \qquad \zeta_m - (\zeta_m)_0 = \zeta_m^+,$$
$$\zeta_l^+(t_1) = \zeta_{l_1}^+, \qquad \zeta_m^+(t_1) = \zeta_{m_1}^+,$$

la relation 35 conduit à :

$$(67) \qquad \boxed{\Delta_D^+ = \varkappa_2 \left[1 - e^{i\omega(t_2 - t_1)}\right] \left[\left(\frac{i}{\omega} - \frac{\varkappa_2 + h + i\omega}{-\mu/A}\right) \nu \zeta_{m_1}^+ + \frac{i}{\omega} \zeta_{l_1}^+\right]}.$$

Ces imperfections provoquent au maximum la déviation

$$\Delta_{D\,max}^+ = 2\varkappa_2 \left[\frac{i}{\omega} - \frac{\varkappa_2 + h + i\omega}{-\mu/A} \nu \zeta_{m_1}^+ + \frac{i}{\omega} \zeta_{l_1}^+\right],$$

et dans le cas de la poussée constante il vient :

$$\Delta_D^+ = \frac{1}{2} \Delta_{D\,max}^+.$$

Enfin si

$$\omega (t_2 - t_1) \simeq 2k\pi,$$

la déviation Δ_D^+ correspondante sera très faible.

5.3.6. *Exemple :*

Un exemple peut donner une idée de l'ordre de grandeur des effets des dissymétries éventuelles du jet propulsif.

Remarquons d'abord que P^+ est de l'ordre de $(F_\nu - F_1)$, et $\frac{P^+}{\mu}$ est de l'ordre de $\frac{1}{al_g}$ [1] on a donc :

$$\boxed{|\zeta^+_{m_1}| < \left|\frac{1}{al_g}\right| (|e| + |l_p \zeta_j|)}.$$

Par ailleurs on sait réaliser

$$|e| \leqslant 0{,}2 \text{ mm} \simeq 2 \cdot 10^{-3} a,$$

et la déviation de jet maximale ζ_j pourrait être estimée telle que :

$$|\zeta_j| \leqslant 2 \cdot 10^{-3}, \quad [2]$$

ce qui conduit à :

$$|\zeta_{m_1}| \leqslant 10^{-2}.$$

Soit maintenant un projectile présentant des caractéristiques aérodynamiques et balistiques analogues à celles du projectile de référence définies par

$$\omega = 150, \quad l_g = 0{,}5, \quad \sqrt{\frac{-\mu}{A}} = 100, \quad \varkappa_1 = 3, \quad \varkappa_2 = 6, \quad h = 12.$$

On a alors

$$\nu = 1, \quad \frac{1}{\omega} = 0{,}67 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{\omega}{-\mu/A} = 1{,}5 \cdot 10^{-2},$$

et il vient par application de la relation 67

$$\Delta^+_D \simeq -(0{,}42\, i + 0{,}11)\,[1 - e^{i\omega(t_2 - t_1)}]\ 10^{-3} \text{ radians.}$$

Des déviations maximales de cet ordre sont relativement fortes mais si on sait réaliser la condition

$$2k\pi - 0{,}3 < \omega (t_2 - t_1) < 2k\pi + 0{,}3,$$

(condition assurée par exemple dans le cas C avec un temps de combustion réglé à $\pm$ 10 %), *les déviations maximales seront toujours inférieures à 1,2 10⁻⁴ radians. L'effet de telles déviations maximales sur l'écart-type de la dispersion du tir est vraisemblablement très faible.*

[1] Le produit al_g représente la distance entre le centre de gravité et le métacentre des forces aérodynamiques (c'est la « marge statique » des aérodynamiciens).

[2] Indication donnée par le dépouillement de tirs de roquettes de petit calibre.

5.4. Cas où les hypothèses ne sont pas applicables.

5.4.1. Les hypothèses qui ont été faites au chapitre 5.1 concernant la reproductibilité de la loi de poussée et la limitation des dissymétries liées au jet n'ont encore été l'objet que de vérifications partielles.

Il est possible que ces hypothèses ne soient pas valables, tout au moins pour certains types de mobiles empennés (cas des projectiles présentant de faibles coefficients de portance et moment).

5.4.2. En pareil cas les altérations provoquées par les imperfections de la loi de poussée risquent d'être d'un ordre supérieur à l'altération de nutation que cette loi de poussée se propose de compenser.

Il convient cependant de limiter la dispersion du tir à un niveau raisonnable tout en communiquant au mobile sur sa trajectoire l'accroissement de vitesse (ou l'impulsion) dont le niveau constitue l'intérêt fondamental de la propulsion additionnelle.

5.4.3. Ce problème devrait pouvoir alors être résolu en donnant à la force propulsive une valeur relativement faible (par exemple 1/3 ou 1/10 de la force latérale unitaire F'_{L_l}), et en maintenant cette poussée bien au-delà de la nutation initiale.

On devrait aboutir ainsi à des valeurs 3 fois ou 10 fois plus faibles de ζ_l^+ et ζ_m^+ et il en serait de même des altérations provoquées par les imperfections de symétrie de la propulsion additionnelle.

Bien entendu, avec un niveau aussi faible de la force propulsive, le déclenchement à court retard de la poussée demeurera favorable mais il n'apportera qu'une compensation partielle de l'altération de nutation.

SIXIÈME PARTIE

CONCLUSIONS

6.1. Effets de la précision au tir sur la probabilité d'atteinte.

6.1.1. Pour *un système donné*, constitué par le *mobile*, le *matériel de lancement* et ses *servants*, la *probabilité d'atteindre* une cible de plein fouet au premier coup ou aux coups suivants est conditionnée par :

— *la dispersion des coups au cours du tir*, c'est-à-dire par le défaut de précision au tir;

— *la dispersion des points moyens d'un tir à l'autre*, c'est-à-dire par le défaut de fidélité du système;

— l'imperfection de la *préparation* ou du *réglage du tir* qui est liée aux conditions du tir (portée, évolutions de la cible, ...);

— *les dimensions de la cible.*

6.1.2. *Les effets, sur la probabilité d'atteinte, de la dispersion des coups au cours du tir* sont partiellement masqués par le défaut de fidélité et par l'erreur de préparation ou de réglage du tir, en particulier au premier coup et principalement si le tir est déclenché sur un but mobile : c'est le cas par exemple du tir antichar.

L'effet de la dispersion des coups est plus net au deuxième coup, en particulier dans le cas du tir réglé sur une petite cible : c'est le cas par exemple des « coups d'embrasure ».

6.13. Étant donné ces résultats, un *critère de précision* au tir tendu en air calme est proposé dans le cas des cibles de l'ordre de 2 m de côté :

$$\sigma^{+} < 0{,}5\ m \qquad \text{(en hauteur et direction).}$$

Ce critère doit être complété par la *condition de traînée*, ou d'*insensibilité relative au vent transversal*

$$T - \frac{X}{V_0} < 0{,}3\ s.$$

Lorsque ces critères sont déjà satisfaits une amélioration de la précision au tir n'a pas, dans l'état actuel de la technique, d'effet très notable sur la probabilité d'atteinte.

6.2. Conditions préalables de la précision au tir de plein fouet.

La précision au tir du mobile empenné est essentiellement liée :

— à la nature du mouvement en incidence (nutation, précession);

— aux imperfections de symétrie caractérisées par la divergence présentée par les axes de moment nul et de force latérale nulle avec l'axe d'inertie (défauts δ_m et δ_l);

— à la sensibilité au vent, qui pour les mobiles voisins du projectile de référence dépend principalement de la traînée.

Une *précision suffisante* du mobile empenné à tir tendu ne peut donc être acquise qu'au prix des *cinq conditions suivantes.*

6.21. *La stabilité* du mouvement en incidence doit être assurée. A cet effet la *périodicité* de ce mouvement doit être garantie par la marge statique ($\mu < 0$), et l'*amortissement* ne doit pas être compromis par des vitesses de roulis trop élevées (effet du couple de Magnus).

6.2.2. Le mobile doit être animé d'une *vitesse de roulis convenablement dosée.* La vitesse de roulis ω_c, voisine de la pulsation de tangage $\sqrt{\frac{-\mu}{A}}$, est *critique* pour le mobile et peut conduire à la mise en vrille.

Étant donné les conditions d'emploi des charges équipant certains projectiles et les risques présentés par la pulsation du couple stabilisant ou par l'effet Magnus, le dosage suivant est recommandé

$$1{,}3\,\omega_c < \omega < \omega_M,$$

avec par exemple $\omega_M = 200$ à 400 rd/s.

6.2.3. *Les imperfections de symétrie* doivent être *limitées.* Dans le cas des empennés supersoniques analogues au projectile de référence les conditions

$$\delta_c < 3 \text{ milliradians}, \qquad \delta_m < 3 \text{ milliradians},$$

sont obtenues *sans difficultés particulières* d'usinage. Ces imperfections sont alors *sans effet notable sur la dispersion* des coups, si le dosage du roulis est convenable.

6.2.4. *L'effet du vent doit être limité* en deçà d'un certain niveau. Un critère d'insensibilité relative au vent transversal a été présenté au paragraphe 6.1.3.

6.2.5. De plus il est *essentiel* que la *résistance au tir* soit *vérifiée expérimentalement*, car elle est indispensable pour la sécurité du tir et pour la limitation des imperfections de symétrie.

6.3. Importance et origine de la nutation initiale.

6.3.1. Ces cinq conditions préalables étant satisfaites, la *dispersion des coups au cours du tir* est principalement *imputable* à la dispersion des *nutations initiales.*

6.3.2. Dans le *cas des mobiles empennée lancés par canon* ou avec effet canon, les *perturbations initiales* sont infligées au projectile *dès l'allumage de la poudre*, puis au cours du forcement, du parcours dans l'âme et du largage sous l'action des gaz et des réactions du tube sur le mobile.

6.3,3. La prolongation de ces perturbations par le *souffle de bouche* paraît avoir alors un effet prépondérant.

6.4. Limitation des effets de la nutation initiale.

6.41.. En première analyse, *pour une famille donnée* de tubes de lancement et de mobiles empennés, les possibilités d'action semblent réduites. Ainsi l'accroissement de la vitesse initiale et l'allègement du mobile influent peu sur la dispersion des coups. De même l'emploi de matériels de lancement plus puissants n'apporte qu'une amélioration limitée de la précision.

6.4.2. Par contre *le choix adéquat de la configuration du mobile* peut diminuer notablement les effets des perturbations en recherchant par exemple :

— une amélioration de la stabilité aérodynamique;

— une diminution de l'instabilité dans le souffle des gaz de bouche (c'est-à-dire un écoulement inversé).

Ceci explique l'amélioration de la précision apportée par les ogives à faible portance, les empennages relativement courts, les culots peu profilés, et, dans certains cas, par l'avancée du centre de gravité.

6.4.3. Par ailleurs une *organisation convenable* du lanceur et le soin apporté à l'adaptation du mobile à ce lanceur permettent de *diminuer les perturbations initiales* ou l'étendue de leurs dispersions.

Ainsi dans le cas des canons, la conception du système et sa mise au point doivent être orientées de manière à assurer :

— la régularité de l'allumage de la charge propulsive;

— l'étanchéité du projectile vis-à-vis des gaz de poudre, dès le forcement et pendant le parcours dans l'âme;

— la limitation des mouvements de volée (soulèvement du tube et du souffle de bouche);

— la limitation des perturbations provoquées par le largage éventuel d'éléments annexes dans le souffle de bouche.

6.5. Propulsion additionnelle et précision au tir.

6.5.1. Une propulsion additionnelle déclenchée avec un court retard pourrait conserver ou même améliorer la précision des mobiles empennés dans la mesure où :

— les phénomènes transitoires qui accompagnent l'allumage et l'extinction du propulseur sont suffisamment reproductibles;

— les dissymétries éventuelles liées au jet propulsif sont suffisamment modérées.

6.5.2. En effet la déviation infligée à la trajectoire par la nutation initiale serait alors systématiquement compensée par le jeu d'une poussée additionnelle déclenchée avec un retard (après largage) de 1 ou éventuellement (2K + 1) périodes, la poussée étant caractérisée par une force propulsive P voisine de la force latérale unitaire F'_{L_1}.

De plus la durée de cette poussée devrait être :

— soit limitée à un petit nombre impair de périodes de nutation correspondant à un roulis de quelques tours complets;

— soit prolongée au-delà de l'amortissement initial.

6.5.3. Au cas où les hypothèses ci-dessus seraient infirmées par l'expérience, il serait préférable de donner au mobile une poussée de valeur nettement plus faible que F'_{L_1} mais de durée relativement longue.

La compensation des altérations dues à la nutation initiale serait alors très imparfaite, mais les altérations provoquées par le jet propulsif seraient alors nettement plus faibles.

6.6. Conclusion d'ensemble.

Une théorie même schématique et incomplète est généralement utile, car en dépit de ses imperfections, elle aide le plus souvent à la compréhension et à la maîtrise des phénomènes observés et permet ainsi d'économiser du temps et de l'argent.

On a présenté ici une théorie explicative principalement vérifiée par les essais d'une certaine famille de projectiles. Elle ne s'applique donc pas à tous les aspects du problème général de la précision des empennés.

Cependant cette théorie a déjà rendu des services, et il est permis aussi de penser que les quelques règles essentielles auxquelles elle conduit faciliteront la mise au point d'autres réalisations en associant la précision au tir à la simplicité et à la légèreté naturelle du mobile empenné.

Enfin il serait opportun d'approfondir et de développer différents points de l'étude, en particulier la vérification de certaines hypothèses, l'effet du couple de Magnus et l'optimalisation de la propulsion additionnelle.

La théorie ainsi complétée et vérifiée améliorerait encore la connaissance de la mécanique du vol et serait susceptible d'ouvrir la voie à une génération d'empennés vraiment nouveaux.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I. *Quelques Précurseurs*

MAGNUS DE SPARRE : *Études diverses relatives aux projectiles tournants* (publiées entre 1875 et 1924).

FOWLER, GALLOP, LOCK et RICHMOND: « Aérodynamique d'un projectile tournant », Traduction, *Mémorial de l'Artillerie française,* 1922.

C. CRANZ : « *Aeussere ballistick* », Springer, Berlin, 1925.

E. ESCLANGON : « Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité », *Mémorial de l'Artillerie française,* 1927.

P. CHARBONNIER : « Sur le mouvement gyroscopique du projectile », *Mémorial de l'Artillerie française,* 1927.

G. SUGOT : « Balistique extérieure théorique », *Mémorial de l'Artillerie française,* 1927.

II. *Auteurs français contemporains*

[B] I.M.P. CARRIÈRE : « Perturbations balistiques d'un projectile autopropulsé à poudre, pendant la phase d'autopropulsion », *Mémorial de l'Artillerie française,* 1951.

[B-1] I.C. DARPAS : « Les mouvements autour du centre de gravité », *Mémorial de l'Artillerie française,* 1953.

[B-2] I.M.G. BESSE : *Cours de balistique extérieure,* Imprimerie Nationale, 1960.

[B-3] I.M.G. SUTTERLIN : *Stabilité et précision au tir des projectiles empennés,* Imprimerie Nationale, 1960.

[B-4] Mlle LOVITON : *Mouvement en assiette d'un projectile soumis à des moments aérodynamiques représentables par des fonctions cubiques de l'angle d'incidence,* Note DEFA, Saint Cloud, 1962.

III. *Auteurs étrangers contemporains*

MM. NIELSEN et SYNGE : « On the motion of a spinning shell ». Traduction *Mémorial de l'Artillerie française,* 1950.

MM. MAC SHANE, KELLEY et RENO : *Exterior ballistics,* The University of Denver Press, U.S.A., 1953.

[B-5] MM. MURPHY et NICOLAIDES : Travaux divers (1955-56), BRL, Aberdeen, Maryland, U.S.A.

MM. DAVIS, FOLLIN et BLITZER : *Exterior ballistics of rockets* D-Van Vostrand, Co-Inc., 1958.

MM. MOLITZ et STRUBEL : *Aeussere ballistick,* Springer, Verlag, R.F.A., 1963.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

Résumé 519

Première Partie. — *Avant-Propos*

1.1. Introduction 523
1.2. Notations et hypothèses classiques 525
1.3. Hypothèses complémentaires 531
1.4. Valeurs numériques 536

2e Partie. — *Les mouvements autour du centre de gravité*

2.1. Mise en équation 539
2.2. Recherche des solutions 542
2.3. Conditions de stabilité 545
2.4. Obliquité résiduelle 546
2.5. Influence des fluctuations des forces aérodynamiques et du moment d'inertie transversale 548
2.6. Effondrement éventuel du couple stabilisant avec les très faibles obliquités 554
2.7. Nature et allure des mouvements autour du centre de gravité 556

3e Partie. — *Les altérations de la trajectoire induites par les mouvements autour du centre de gravité*

3.1. Définition des différentes altérations 559
3.2. Les altérations induites par la nutation, nutation initiale et nutation sur la trajectoire 561
3.3. Les altérations induites par les imperfections de symétrie 565
3.4. Dosage de la vitesse de roulis 568

4e Partie. — *Dispersion des altérations, répercussions sur la précision au tir et sur la probabilité d'atteinte*

4.1. Remarques préliminaires. — Objet de la 4e partie 573
4.2. Définitions, éléments de la dispersion du tir 574
4.3. Conditions préalables de la précision au tir 578
4.4. Limitation des effets de la nutation initiale 580
4.5. Effet de la précision au tir sur la probabilité d'atteinte, critère de précision 588

5e Partie. — *Extension de la théorie, précision des empennés à propulsion additionnelle*

5.1. Possibilités d'optimalisation. Hypothèses complémentaires. Nouvelle expression de l'obliquité 595
5.2. Calcul des lois optimales 599
5.3. Effet des perturbations éventuelles apportées par la propulsion additionnelle 603
5.4. Cas où les hypothèses complémentaires ne sont plus applicables 607

6e Partie. — *Conclusions* 609

Références bibliographiques 613

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ESTIMATION STATISTIQUE DES PERFORMANCES D'UN SYSTÈME PHYSIQUE COMPLEXE À COURTE DURÉE DE FONCTIONNEMENT

Vu et approuvé :

Paris, le 28 novembre 1966

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN ROCHE.

IMPRIMERIE NATIONALE. — 7 832028 5